ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2014

А. Д. Марковский (Москва, МГУЛ). **Симметричная предельная схема параллельного деления комплексных чисел в произвольном вычислительном базисе.**

В работе [1] приведены определения понятий *аддитивного и мультипликативного вычислительных базисов* на полях R и C действительных и комплексных чисел. Эти понятия редуцируют и уточняют традиционные представления о системах счисления, открывая неизвестные ранее возможности универсального описания вычислительных алгоритмов на основе только двух элементарных операций — *сложения* действительных чисел и *сдвига*, сводящегося к умножению действительных чисел на базисные элементы $b(j)$ из фиксированного аддитивного вычислительного базиса $B^+ = \{b(j) \in R \,|\, j \in \mathbf{N}\} \in \beta$, где β — множество всех аддитивных вычислительных базисов на R.

Ниже дается универсальная схема параллельного деления комплексного вектора $\{x^p + y^p i \in C \,|\, p \in \{1, 2, \ldots, n\},\ i^2 = -1\}$ на его компоненту $x^q + y^q i$, $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в произвольном вычислительном базисе $B^+ = \{b(j) \in R \,|\, j \in \mathbf{N}\}$, основанная на разложении этой компоненты по мультипликативному вычислительному базису $B^\bullet = \{(1 + s_k b(j_k) + t_k b(l_k) i)^{-1} \in C \,|\, k \in \mathbf{N},\ s_k \in \{-1, 0, 1\},\ t_k \in \{-1, 0, 1\},\ b(j_k) \in R,\ b(l_k) \in R\}$ на поле C. Для восприятия приводимой схемы не обязательно знакомство с работами [1], [2]. Достаточно знать, что по доказанной теореме, *счетное множество $B^+ \subset R$ есть аддитивный вычислительный базис на поле R тогда и только тогда, когда оно имеет ноль своей предельной точкой.* Примерами аддитивных вычислительных базисов на R служат сходящиеся последовательности: $B_1^+ = \{1/n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$, $B_2^+ = \{2^{-n} \,|\, n \in \mathbf{N}\}$, $B_{10}^+ = \{10^{-n} \,|\, n \in \mathbf{N}\}$.

Схема. $\forall B^+ \in \beta$, $\forall b \in \mathbf{N}$, $\forall p \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\forall q \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\forall x^p + y^p i \in C$, $\forall x^q + y^q i \in C$, $\forall k \in \mathbf{N}$, $\forall s_k \in \{-1, 0, 1\}$, $\forall t_k \in \{-1, 0, 1\}$, $\forall j_k \in \mathbf{N}$, $\forall l_k \in \mathbf{N}$, $\forall b(j_k) \in B^+$, $\forall b(l_k) \in B^+$:

$$\left[\begin{array}{l} x_0^p = x^p,\ y_0^p = y^p, \qquad (1)\\ x_k^p = x_{k-1}^p + s_k b(j_k) x_{k-1}^p - t_k b(l_k) y_{k-1}^p, \qquad (2)\\ y_k^p = y_{k-1}^p + s_k b(j_k) y_{k-1}^p + t_k b(l_k) x_{k-1}^p, \qquad (3)\\ \lim_{k\to\infty} x_k^q = \operatorname{sgn} x^q,\ \lim_{k\to\infty} y_k^q = 0. \qquad (4) \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x^q + y^q i \neq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{Re}\left(\dfrac{x^p + y^p i}{x^q + y^q i}\right) = \operatorname{sgn} x^q \cdot \lim\limits_{k\to\infty} x_k^p, \qquad (5)\\ \operatorname{Im}\left(\dfrac{x^p + y^p i}{x^q + y^q i}\right) = \operatorname{sgn} x^q \cdot \lim\limits_{k\to\infty} y_k^p, \qquad (6)\\ x^q + y^q i = \operatorname{sgn} x^q \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 + s_k b(j_k) + t_k b(l_k) i^{-1}. \qquad (7) \end{array}\right]\right]$$

Согласно схеме, если в произвольном вычислительном базисе $B^{+} = \{b(j) \in R \,|\, j \in \mathbf{N}\}$ производить вычисления по рекуррентным формулам (2), (3) с начальными условиями (1), стремясь выполнить предельные условия (4), то в соответствии с предельными соотношениями (5), (6), где $\operatorname{sgn} x^q = \begin{cases} 1 \text{ при } x^q \geqslant 0, \\ -1 \text{ при } x^q < 0, \end{cases}$ определятся действительная и мнимая части частного от деления комплексного вектора $\{x^1 + y^1 i, x^2 + y^2 i, \ldots, x^n + y^n i\}$ на его компоненту $x^q + y^q i \neq 0$, причем, в виду (7), параллельно осуществится разложение делителя $x^q + y^q$ по мультипликативному базису $B^{\bullet}$.

В отличие от рассмотренной в [2] схемы параллельного деления действительных чисел данная схема содержит два предельных условия. Образно говоря, это схема с «двойным параллелизмом». Схемы с двойным параллелизмом позволяют действовать с комплексными векторами, практически столь же быстро, как обычные параллельные схемы оперируют с действительными векторами. Другое принципиальное достоинство данной схемы состоит в ее «делительной симметрии». Так я называю свойство схем параллельного деления, заключающееся в полной симметрии обработки делимых; делитель заранее не фиксируется, и по желанию пользователя им может быть любое из n делимых, чаще всего — максимальный по модулю элемент.

Благодаря наличию предельных переходов (4), данная схема кодирует бесконечное множество алгоритмов параллельного деления комплексных, в частности, действительных чисел. Чтобы получить конкретный алгоритм надо на каждом k-м шаге указать конструктивные правила определения «знаковых» параметров s_k, t_k и «сдвиговых» параметров j_k, l_k, выбирающих базисные элементы $b(j_k)$, $b(l_k)$. Могущество и универсальность предельной схемы в том, что любые правила хороши, лишь бы удовлетворялись предельным условиям (4).

Алгоритмы, кодируемые данной схемой, ранее не были известны. Наилучшие из них в несколько раз превосходят по быстродействию при заданной точности все освоенные алгоритмы деления чисел. Они незаменимы при типовых вычислениях, в особенности при вычислении тригонометрических функций действительного и комплексного аргументов, реализации координатных преобразований и быстрого преобразования Фурье. На основе данной схемы может быть создан самый эффективный, не улучшаемый по быстродействию при фиксированной технологии процессор типовых вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марковский А. Д.* Вычислительные базисы для основных числовых систем. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 3, с. 453–455.
2. *Марковский А. Д.* Предельные базисные схемы как основа классификации и оптимизации вычислительных алгоритмов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 4, с. 582–584.