О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й   И   П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м   21   М А Т Е М А Т И К И   В ы п у с к   4
2014

Т. Г. С у к а ч е в а, А. О. К о н д ю к о в (Великий Новгород, НовГУ). **Об одной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости в магнитном поле Земли.**

Система

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v - \dfrac{1}{\rho}\nabla p - 2\Omega\times v + \dfrac{1}{\rho\mu}(\nabla\times b)\times b, \\ \nabla\cdot v = 0, \quad \nabla\cdot b = 0, \\ b_t = \delta\nabla^2 b + \nabla\times(v\times b) \end{cases}$$

моделирует поток несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта в магнитном поле Земли. Здесь вектор-функции $v = (v_1(x,t), v_2(x,t), \ldots, v_n(x,t))$ и $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), \ldots, b_n(x,t))$ характеризуют скорость жидкости и магнитную индукцию соответственно, $p = p(x,t)$ — давление; $æ$ — коэффициент упругости, ν — коэффициент вязкости, Ω — угловая скорость, δ — магнитная вязкость, μ — магнитная проницаемость, ρ — плотность. Заметим, что указанная система обобщает систему, приведенную в [1] при $æ = 0$, и при $\mu = 1$ и $\rho = 1$ будет иметь вид

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v - \nabla p - 2\Omega\times v + (\nabla\times b)\times b, \\ \nabla\cdot v = 0, \quad \nabla\cdot b = 0, \\ b_t = \delta\nabla^2 b + \nabla\times(v\times b). \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для системы (1)

$$\begin{aligned} &v(x,0) = v_0(x), \quad b(x,0) = b_0(x) \quad \forall x\in D, \\ &v(x,t) = 0, \quad b(x,t) = 0 \quad \forall (x,t)\in\partial D\times\mathbf{R}_+. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $D\subset\mathbf{R}^n$, $n = 2,3,4$ — ограниченная область с границей ∂D класса C^∞.

Задача (1), (2) лежит в русле исследований моделей сред Кельвина–Фойгта, начатых А. П. Осколковым [2], который обобщил знаменитую систему уравнений Навье–Стокса, и получил теоремы существования и единственности решения для соответствующих начально-краевых задач. В данной работе изучается разрешимость задачи $(1), (2)$. Указанная задача исследуется в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа. Ранее предложенный полугрупповой подход [3] использовался одним из соавторов при исследовании задачи термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости [4].

Работа состоит из двух частей. В первой части работы излагается абстрактная задача Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для *полулинейного автономного уравнения соболевского типа*

$$L\dot{u} = Mu + F(u). \tag{4}$$

Здесь оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, т.е. линеен и непрерывен; оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathcal{U}$, т.е. $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства. Обозначим через $\mathcal{U}_M = \{u \in \operatorname{dom} M : \|u\| = \|Mu\|_{\mathcal{F}} + \|u\|_{\mathcal{U}}\}$. Оператор $F \in C^{\infty}(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$.

Локальным решением (далее просто — *решением*) задачи (3), (4) назовем вектор-функцию $u \in \mathcal{C}^{\infty}((0,T);\mathcal{U}_M)$, удовлетворяющую уравнению (4) и такую, что $u(t) \to u_0$ при $t \to 0+$. Предположим, что оператор M сильно (L,p)-секториален [3]. Хорошо известно, что при этом условии решение задачи (3), (4) может быть не единственным. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся поиском только таких решений задачи (3), (4) которые являются *квазистационарными полутраекториями.*

О п р е д е л е н и е 1. Пусть пространство $\mathcal{U}$ расщепляется в прямую сумму $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \mathcal{U}_1$ так, чтобы $\ker L \subset \mathcal{U}_0$. Решение $u = v + w$, где $v(t) \in \mathcal{U}_0$, а $w(t) \in \mathcal{U}_1$ при всех $t \in (0,T)$, уравнения (3) назовем *квазистационарной полутраекторией*, если $L\dot{v} \equiv 0$.

О п р е д е л е н и е 2. Множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_M$ назовем *фазовым пространством* уравнения (4), если для любой точки $u_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное решение задачи (3), (4), причем $u(t) \in \mathcal{B}$.

Во второй части задача $(1),(2)$ рассматривается как конкретная интерпретация абстрактной задачи (3), (4).

Теорема. *Пусть* $æ^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. *Тогда при любом* u_0 *таком, что* $u_0 \in \mathcal{M}$ *и некотором* $T \in \mathbf{R}_+$ *существует единственное решение* $u = (u_\sigma, 0, u_p, u_b)$ *задачи* $(1),(2)$, *являющееся квазистационарной полутраекторией, причем* $u(t) \in \mathcal{M}$ *при всех* $t \in (0,T)$.

Здесь $\mathcal{M}$ — фазовое пространство задачи (1), (2). Оператор A соответствует оператору при производной в левой части первого уравнения в системе (1), A_σ — его сужение на соответствующее подпространство соленоидальных векторов.

Работа поддержана Министерством Образования и Науки Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания № 1.857.2014/K.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hide R.* On planetary atmospheres and interiors. — In: Mathematical Problems in the Geophisical Sciences. V. 1./ Ed.by W. H. Raid, Providence R.I.: AMS, 1971.
2. *Осколков А. П.* Начально–краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1988, т. 179, с. 126–164.
3. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht: VSP, 2003.
4. *Сукачева Т. Г.*, *Матвеева О. П.* Задача термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка. — Изв. ВУЗов. Сер. матем., 2001, № 11(474), с. 46–53.