ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2014

П. В. Р о л д у г и н (Москва, ТВП). **О подмножествах $\mathbf{Z}_d$, в которых разности элементов не взаимно просты с d.**

Объектом исследования настоящей работы являются такие подмножества I группы вычетов $(\mathbf{Z}_d, +)$, $d \in \mathbf{N}$, что НОД $(n-m, d) \neq 1$ для любых $n, m \in \mathbf{Z}_d$. Далее подмножества с таким свойством станем называть *множествами нетривиальных разностей*. Семейство всех множеств нетривиальных разностей обозначим $U(d)$.

Множество $U(d)$ легко описывается для простого d (или $d = 1$). В этом случае НОД $(n-m, d) = 1$ для любых $n, m \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ и поэтому $|U(d)| = d$.

Наибольшая мощность множества нетривиальных разностей равна 1.

Пусть далее $d > 1$. Используем обозначение $d = d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_t^{a_t}$ разложения числа d на простые множители $a_i > 0$, d_i — простое, $i = 1, 2, \ldots, t$, $d_1 < d_2 < \cdots < d_t$.

Теорема 1. *Наибольшее значение мощности множества нетривиальных разностей равно* d/d_1.

Определим граф Γ, множеством вершин V которого является всевозможные наборы $(m_1, m_2, \ldots, m_{t-1})$, $0 \leqslant m_i \leqslant d_i - 1$, $i \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$, и два набора $(m_1, m_2, \ldots, m_{t-1})$, $(m_1', m_2', \ldots, m_{t-1}')$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $m_1 \neq m_1', m_2 \neq m_2', \ldots, m_{t-1} \neq m_{t-1}'$. Для каждого подмножества $\Omega \subset V$ рассмотрим порожденный этим подмножеством подграф Γ_Ω. Обозначим $\eta(p, s; g_1, \ldots, g_p)$ число подмножеств $\Omega \subset V$, для которых граф Γ_Ω имеет p нетривиальных компонент связности порядков $g_1, g_2, \ldots, g_p$ и s изолированных вершин.

Теорема 2. *Для любого* $d > 1$

$$|U(d)| = \sum_{s=0}^{d_1 \cdots d_{t-1}} \sum_{p=0}^{d_1 \cdots d_{t-1}} \sum_{\substack{g_1 \geqslant 2, \ldots, g_p \geqslant 2: \\ g_1 + \cdots + g_p \geqslant d_1 \cdots d_{t-1}}} \eta(p, s; g_1, \ldots, g_p)\, d_t^p \prod_{i=1}^{p} \left(2^{\frac{d}{d_1 \cdots d_t} g_i}\right) \left(2^{\frac{d}{d_1 \cdots d_{t-1}}}\right)^s.$$

Более простой вид формула для мощности $U(d)$ принимает в случае, когда все $a_i = 1$, т. е. $d = d_1 d_2 \cdots d_t$.

Следствие. *Если* $d = d_1 d_2 \cdots d_t > 1$, *то*

$$|U(d)| = \sum_{s=0}^{d/d_t} (2^{d_t} - 1)^s \Bigg(\sum_{p=0}^{d/d_t} \sum_{\substack{g_1 \geqslant 2, \ldots, g_p \geqslant 2: \\ g_1 + \cdots + g_p \leqslant d/d_t}} \eta(p, s; g_1, \ldots, g_p)\, d_t^p \prod_{i=1}^{p} (2^{g_i} - 1) \Bigg).$$

Найти точную формулу для вычисления величины $\eta(p, s; g_1, \ldots, g_p)$ представляется достаточно сложной задачей, однако ее можно вычислить компьютерным перебором для случаев, когда $d/d_r \leqslant 42$, т. е. для чисел $d = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot d_4$ и чисел $d = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot d_4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973, с. 86–87.