ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2014

Ю. Н. Горелов, **Н. И. Пыринов** (Самара, ИПУСС РАН, СамГУ). **Об одном наблюдающем устройстве возмущений внешней среды для управляемой линейной системы.**

Рассматривается стационарный объект управления (ОУ):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + D\mathbf{f}(t); \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ есть вектор переменных состояния, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ есть вектор управляющих параметров, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$ есть вектор измеряемых переменных выхода, $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^r$ есть вектор-функция возмущений внешней среды (ВС). Соответственно, $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ есть матрица динамики ОУ, $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$ есть матрица управляющих входов, $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$ есть матрица выходов, $D \in \mathbf{R}^{n\times r}$ есть матрица входов возмущающих воздействий. Матрицы B, C и D есть матрицы полного ранга, для которых, как правило, имеют место соотношения $n \geqslant m$, $n \geqslant p$, $n \geqslant r$. Вектор-функция возмущений в (1) неизвестна, но для описания ВС обычно принимается ее следующая модель [1, 2]:

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = G\,\boldsymbol{\xi}; \quad f = H\,\boldsymbol{\xi}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^{\nu}$ есть вектор переменных состояния ВС, $G \in \mathbf{R}^{\nu\times\nu}$ есть матрица динамики, а $H \in \mathbf{R}^{r\times\nu}$ есть матрица выходов для возмущений. Матрицу G в (2) назначают, исходя из доступной информации о свойствах ВС, или определяют ее при индентификации расширенного ОУ (1), (2).

Рассматриваемая задача состоит в том, чтобы для заданного входа $\mathbf{u}(t)$, $\forall t \geqslant t_0$, по наблюдениям $\mathbf{y}(t)$ обеспечить оценивание как текущего состояния ОУ $\mathbf{x}(t)$, так и действующих на него возмущений $\mathbf{f}(t)$. Как известно, при этом без ограничения общности в (1) далее можно принять $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$.

Следуя [1], рассмотрим наблюдающее устройство оценки действующих на ОУ (1), (2) возмущений, которое при наличии каких-либо доступных измерений $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{f}(t)$ имело бы следующий вид:

$$\frac{d\widehat{\boldsymbol{\xi}}}{dt} = G\widehat{\boldsymbol{\xi}} + L(\mathbf{f} - \widehat{\mathbf{f}}); \quad \widehat{\mathbf{f}} = H\widehat{\boldsymbol{\xi}},$$

где $\widehat{\boldsymbol{\xi}}(t)$ и $\widehat{\mathbf{f}}(t)$ — соответствующие текущие оценки, а $L \in \mathbf{R}^{\nu\times r}$ есть матрица коэффициентов усиления. Если $G - LH$ является гурвицевой матрицей, то $\Delta\mathbf{f}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, где $\Delta\mathbf{f}(t) = H\Delta\boldsymbol{\xi}(t)$, $\Delta\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} - \widehat{\boldsymbol{\xi}}$.

В [1] для скалярного возмущения $(r = 1)$ рассмотрена схема наблюдения, в которой в качестве возмущений используются вспомогательные переменные в виде комбинаций переменных состояния $\mathbf{x}(t)$. Для ОУ (1) они имеют вид: $\mathbf{w} = P\mathbf{x}$, где матрица

$P \in \mathbf{R}^{r\times n}$ подчинена условию $PD = I_r$, а $I_r \in \mathbf{R}^{r\times r}$ есть единичная матрица. Уравнение наблюдателя тогда будет таким:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = (G - LH)\mathbf{z} + [(G - LH)LP - LPA]\mathbf{x}, \tag{3}$$

где $\mathbf{z} = \widehat{\boldsymbol{\xi}} - L\mathbf{w}$. Решение уравнения (3) для некоторого $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0)$ доставляет $\widehat{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{z}(t) + LP\mathbf{x}(t)$ и, стало быть, искомую оценку:

$$\widehat{\mathbf{f}}(t) = H\widehat{\boldsymbol{\xi}}(t) = H[\mathbf{z}(t) + LP\mathbf{x}(t)]. \tag{4}$$

Как и в [1], оценка (4) получена в предположении о непосредственном измерении $\mathbf{x}(t)$. С учетом (2) для ОУ (1) можно построить наблюдающее устройство, в котором используются какие-либо оценки для возмущений ВС, а именно:

$$\frac{d\widehat{\mathbf{x}}}{dt} = A\widehat{\mathbf{x}} + D\widehat{\mathbf{f}}(t) + K(\mathbf{y} - C\widehat{\mathbf{x}}), \tag{5}$$

где $K \in \mathbf{R}^{n\times p}$ есть матрица коэффициентов усиления.

Ошибки оценивания $\Delta\mathbf{x}(t) = \widehat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ и $\Delta\boldsymbol{\xi}(t) = \widehat{\boldsymbol{\xi}}(t) - \boldsymbol{\xi}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = (A - KC)\Delta\mathbf{x} + DH\Delta\boldsymbol{\xi}, \quad \frac{d\Delta\boldsymbol{\xi}}{dt} = (G - LH)\Delta\boldsymbol{\xi}.$$

При $t \to \infty$ $\Delta\mathbf{x}(t) \to 0$ и $\Delta\boldsymbol{\xi}(t) \to 0$, если $A - KC$ и $G - LH$ гурвицевы матрицы.

Таким образом, для построения наблюдающего устройства возмущений ВС (3) необходимо использовать оценки текущего состояния ОУ (1) и, в свою очередь, для (5) — оценки возмущений (4), т. е. $\widehat{\mathbf{f}}(t) = H[\mathbf{z}(t) + LP\widehat{\mathbf{x}}(t)]$, где $\mathbf{z}$ — вектор переменных наблюдающего устройства (3), получаемый при замене переменных $\mathbf{x}$ на $\widehat{\mathbf{x}}$. В конечном счете, вместо (3), (5) получим

$$\frac{d\widehat{\mathbf{x}}}{dt} = (A - KC + DHLP)\widehat{\mathbf{x}} + DH\mathbf{z} + K\mathbf{y}, \tag{6}$$

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = (G - LH)\mathbf{z} + [(G - LH)LP - LPA]\widehat{\mathbf{x}}. \tag{7}$$

Система (6), (7) — наблюдающее устройство совместного оценивания текущего состояния ОУ (1) и действующих на него возмущений.

Если вместо $\mathbf{w} = P\mathbf{x}$ ввести вспомогательные переменные $\widehat{\mathbf{w}} = P\widehat{\mathbf{x}}$, а для вектора состояния наблюдающего устройства $\widehat{\mathbf{z}} = \widehat{\boldsymbol{\xi}} - L\widehat{\mathbf{w}}$, то вместо (3) получим

$$\frac{d\widehat{\mathbf{z}}}{dt} = (G - LH)\widehat{\mathbf{z}} + [(G - LH)LP - LP(A - KC)]\widehat{\mathbf{x}} - LH\Delta\boldsymbol{\xi} - LPK\mathbf{y}. \tag{8}$$

Если матрица $G - LH$ гурвицева, то при $t \to \infty$ $\Delta\boldsymbol{\xi}(t) \to 0$, а также $\Delta\mathbf{z}(t) \to 0$, где $\Delta\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) - \mathbf{z}(\mathbf{t})$. Таким образом, отбрасывая в (8) член с $\Delta\boldsymbol{\xi}$, получим наблюдающее устройство следующего вида:

$$\frac{d\widehat{\mathbf{x}}}{dt} = (A - KC)\widehat{\mathbf{x}} + D\widehat{\mathbf{f}}(t) + K\mathbf{y}; \tag{9}$$

$$\frac{d\widehat{\mathbf{z}}}{dt} = (G - LH)\widehat{\mathbf{z}} + [(G - LH)LP - LP(A - KC)]\widehat{\mathbf{x}} - LPK\mathbf{y}; \tag{10}$$

$$\widehat{\mathbf{f}}(t) = H[\widehat{\mathbf{z}}(t) + LP\widehat{\mathbf{x}}(t)] \quad \text{при любых} \quad t \geqslant t_0. \tag{11}$$

Начальные условия для (9) и (10) можно задавать, например, так:

$$\widehat{\mathbf{x}}(t_0) = \widehat{\mathbf{x}}_0 = C^T(CC^T)^{-1}\mathbf{y}(t_0); \quad \widehat{\mathbf{z}}(t_0) = \widehat{\mathbf{z}}_0 = -LP\widehat{\mathbf{x}}_0;$$

последнее в предположении, что в (2) принято $\widehat{\boldsymbol{\xi}}(t_0) = 0$.

Реализация наблюдающего устройства (9)–(11) предполагает введение модели ВС (2), размерность которой определяет размерность уравнения (10). При этом чем больше размерность вектора $\boldsymbol{\xi}$ в (2), тем более широкий спектр возмущений ВС при этом моделируется, но это же приводит к затруднениям в практической реализации указанного наблюдающего устройства. Поэтому также можно рассматривать такой вариант реализации наблюдающего устройства (3)–(5) или (9)–(10). Пусть модель ВС имеет вид: $\dfrac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \delta\boldsymbol{\xi}$; $\mathbf{f} = \boldsymbol{\xi}$, где $\delta\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^r$ — случайный процесс с заданными статистическими характеристиками, т. е. вектор переменных состояния ВС отождествляется непосредственно с вектором возмущений ВС. При этом следует принять: $G = 0$, $H = I_r \in \mathbf{R}^{r\times r}$. Таким образом, принята модель ВС, которая генерирует некоторые постоянные возмущения с аддитивными случайными составляющими. Тогда наблюдающее устройство для $\mathbf{f}(t)$ будет иметь такой вид: $\dfrac{d\widehat{\mathbf{f}}}{dt} = L(\mathbf{f} - \widehat{\mathbf{f}})$, где $\widehat{\mathbf{f}}(t)$ — текущие оценки возмущений, а $L \in \mathbf{R}^{r\times r}$. Повторяя процедуру введения переменных $\mathbf{w} = P\mathbf{x}$, где $P \in \mathbf{R}^{r\times n}$ и $PD = I_r$, вектор состояния наблюдающего устройства определим так: $\mathbf{z} = \widehat{\mathbf{f}} - L\mathbf{w}$. Дифференцируя его (в конечном счете), получим следующее уравнение наблюдающего устройства:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = -L\mathbf{z} - L(LP + PA)\widehat{\mathbf{x}}.$$

Решение этого уравнения для некоторого $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0)$ вместе с решением (5) или (9) доставляют искомую оценку $\widehat{\mathbf{f}}(t)$, а именно: $\widehat{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{z}(t) + LP\widehat{\mathbf{x}}(t)$.

Исследование проведено при поддержке РФФИ, проекты № 13-08-97019р поволжье а, № 13-01-97002р поволжье а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мирошник И. В.* Теория автоматического управления. Линейные системы. СПб.: Питер, 2005, 336 с.
2. *Кузовков Н. Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976, 184 с.