О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 21 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 5
2014

О. В. Р у с а к о в, Д. Б. А п л е е в (Санкт-Петербург, СПбГУ). **Одно обобщение модели Васичека на случай многих факторов: пример спот-ставки с двумя факторами.**

В работе вводится в рассмотрение следующее обобщение модели Васичека, когда спот-ставка описывается не одним, а взвешенной суммой нескольких (детально рассматривается случай двух) независивых процессов Орнштейна-Уленбека (далее — ОУ) с различными весами.

Предварительно центрированный и нормированный линейным преобразованием стохастический процесс, описывающий поведение ставки, мы рассматриваем в следующем виде:

$$x_t \stackrel{d}{=} a_1 U_{\lambda_1}(t) + \cdots + a_n U_{\lambda_n}(t), \qquad n \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

где $t \geqslant 0$, — «весовые» параметры удовлетворяют условиям $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ и $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \infty$, все U_{λ_i} — совокупно независимые стандартные (с нулевым средним и единичной дисперсией) процессы ОУ с вязкостями, равными λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, соответственно.

Вследствие потери марковского свойства мы уже не можем говорить о переходном распределении $P(x_{t+s}|x_s)$, когда процесс стартует в произвольный момент времени s из точки z, и проходит затем еще время t. В этом случае при каждом произвольном, но фиксированном $z \in \mathbf{R}$ условное математическое ожидание и условная дисперсия станут уже величинами случайными [2].

Утверждение. Имеет место следующее равенство по распределению

$$\mathbf{E}(x_t|x_0 = z) = \xi e^{-\lambda_1 t} + (z - \xi) e^{-\lambda_2 t}, \tag{2}$$

где случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами:

$$\mathbf{E}\xi = \alpha z; \quad \mathbf{D}\xi = \alpha(1 - \alpha). \tag{3}$$

Очевидно, что процесс x_t стационарен, и что $x_t \in N(0,1)$ для любого фиксированного $t \geqslant 0$. Так как для одного процесса ОУ ковариация имеет вид $\operatorname{cov}(U_\lambda(s), U_{\lambda(s+t)}) = \exp\{-\lambda t\}$, для любых $s, t \geqslant 0$, то ковариационная функция для x_t равна

$$\operatorname{cov}(x_s, x_{t+s}) = a_1 e^{-\lambda_1 t} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n t}. \tag{4}$$

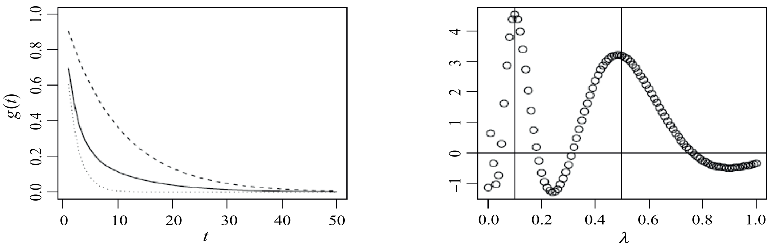

Рис. 1. Слева: ковариационная функция процесса x_t , а также «составляющих» его процессов ОУ. Справа: график обратного преобразования Лапласа ковариационной функции процесса x_t

Заметим, что $e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$ есть преобразование Лапласа ([3]) [нормированной] вероятностной меры, вырожденной в точке $\lambda > 0$. Ковариационная функция (4) есть преобразование Лапласа при аргументе $t \geqslant 0$ от распределения случайной величины η , принимающей значения $\lambda_1 > 0$ с вероятностью $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и $\lambda_2 > 0$ с вероятностью $1 - \alpha$. Наши следующие действия преследуют цель: по наблюдениям стационарного процесса x_t с ковариацией $R_x(t)$, $t \geqslant 0$ и вычисленной оценке автоковариационной функции этого процесса $\widehat{R}_x(t)$ нам требуется решить уравнение

$$\alpha e^{-\lambda_1(t)} + (1-\alpha)e^{-\lambda_2(t)} = R_x(t) \tag{5}$$

относительно $\alpha, \lambda_1, \lambda_2$, т. е. фактически обратить преобразование Лапласа для (11).

Отметим, что преобразование Лапласа вообще плохо обращается, а у нас случай даже не функции, а дискретной меры. Задача решается с помощью численного метода, основанного на регуляризации Тихонова (известного также как regularization collocation method [1]).

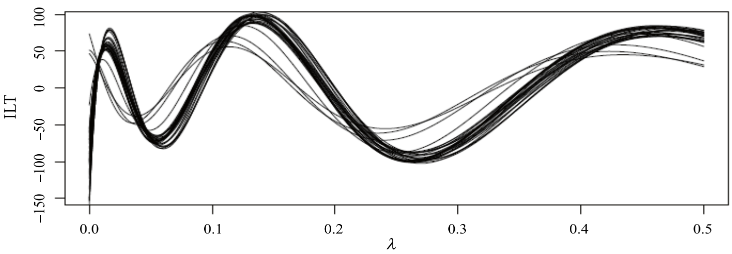

Рис. 2. На графике обратного преобразования Лапласа наблюдаются «пики», соответствующие значениям параметров «вязкости» исходных процессов около $0,15$ и $0,45$

Описанные выше алгоритмы были применены к эмпирическим временным рядам значений наблюдаемых «коротких» ставок, представленных доходностями трехмесячных облигаций США (результат на рис. 2).

Полученный результат свидетельствует о возможной неоднородности структуры процесса ставки: меньшие значения «вязкости» соответствуют более инертным агентам, чье влияние на ставку менее подвержено текущей рыночной конъюнктуре, характеризуется большей консервативностью и устойчивостью. Большие значения «вязкости» присущи более активным участникам рынка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Egonmwan A.* The Numerical Inversion of the Laplace Transform. Saarbrucken: Lap Lambert Academic Publ., 2012, p. 1–81.
2. *Русаков О. В.* Пуассоновские субординаторы, поле Винера–Орнштейна–Уленбека и связь броуновских мостов с переходными характеристиками процессов Орнштейна–Уленбека. — Записки научных семинаров ПОМИ, 2010, в. 384, с. 225–237.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.