ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2014

А. А. Липатьев, В. В. Ульянов (Москва, МГУ). **О вычислимых оценках для статистики Бартлетта–Нанда–Пиллай.**

В многомерном однофакторном дисперсионном анализе обычно (см., напр., гл. 6 в [1]) рассматриваются q выборок $\{y_{i1}, \ldots, y_{in_i}\}$, $i = 1, \ldots, q$. При этом предполагается, что p — мерное наблюдение y_{ij} представимо в виде

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij},$$

где μ и α_i — неизвестные векторные параметры, а ε_{ij} — ошибки, являющиеся независимыми одинаково распределенными случайными векторами с нормальным распределением $N_p(0, \Sigma)$.

Рассматривается основная гипотеза

$$H_0 : \alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0.$$

Определяются матрицы S_b и S_w, отражающие межуровневые (межгрупповые) и внутриуровневые (внутригрупповые) различия соответственно для элементов выборок:

$$S_b = \sum_{i=1}^{q} n_i(\overline{y}_i - \overline{y})(\overline{y}_i - \overline{y})', \quad S_w = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y}_i)(y_{ij} - \overline{y}_i)',$$

где

$$\overline{y}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$

и $n = n_1 + \cdots + n_q$.

В случае справедливости гипотезы H_0 случайные матрицы S_b и S_w независимы и имеют центральные распределения Уишарта $W_p(q, \sum)$ и $W_p(n-q, \sum)$ соответственно. На базе матриц S_b и S_w для проверки гипотезы H_0 традиционно строятся три статистики: статистика отношения правдоподобия T_{LR}, статистика Лоули–Хотеллинга (Lawley–Hotelling) T_{LH} и статистика Бартлетта–Нанда–Пиллай (Bartlett–Nanda–Pillai) T_{BNP}. Упрощая обозначения и не ограничивая общности, в предположении справедливости основной гипотезы H_0 мы можем записать эти статистики в виде

$$T_{LR} = -n\ln\left(|S_e|/|S_e + S_h|\right), \quad T_{LH} = n\,tr S_h S_e^{-1}, \quad T_{BNP} = n\,tr S_h(S_e + S_h)^{-1},$$

где случайные матрицы S_h и S_e независимы и имеют центральные распределения Уишарта $W_p(q, I_p)$ и $W_p(n, I_p)$ соответственно.

Хорошо известно (см., напр., гл. 6 в [1]), что при фиксированных значениях p и q и при $n \to \infty$ все три статистики сходятся по распределению к хи-квадрат распределению с pq степенями свободы. Более того, в [2] и [3] получены вычислимые оценки погрешности приближений для статистики отношения правдоподобия и статистики Лоули–Хотеллинга, а именно найдены верхние вычислимые оценки для величин

$$\sup_x |P(T_{LR} < x) - G_{pq}(x)| \quad \text{и} \quad \sup_x |P(T_{LH} < x) - G_{pq}(x)|,$$

где $G_{pq}(x)$ есть функция распределения хи-квадрат распределения с pq степенями свободы. Также в [4] получены вычислимые оценки нормального приближения для нормированной статистики T_{LR} в модели высокой размерности, т. е. для случая, когда размерность наблюдений p сравнима с объемом выборки n.

Доклад посвящен новому результату, дающему вычислимые оценки погрешности для приближения функции распределения статистики Бартлетта–Нанда–Пиллай T_{BNP} :

Теорема. *При фиксированных p и q существует постоянная $C(p,q)$, зависящая только от p и q такая, что при всех $n \geqslant C(p,q)$ справедливо неравенство*

$$\sup_x |P(T_{BNP} < x) - G_{pq}(x)| \leqslant \frac{2(1+\sqrt{pq}) + 3A_{pq}}{n},$$

где A_{pq} — вычислимая оценка из неравенства (см. Theorem 4.1 (i) в [3])

$$\sup_x |P(T_{LH} < x) - G_{pq}(x)| \leq \frac{A_{pq}}{n}.$$

Работа поддержана проектом РНФ 14-11-00364.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fujikoshi Y.*, *Ulyanov V. V.*, *Shimizu R.* Multivariate Statistics : High-Dimensional and Large-Sample Approximations, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Hoboken, N.J., 2010.
2. *Fujikoshi Y.*, *Ulyanov V. V.* Error bounds for asymptotic expansions of Wilks lambda distribution. — J. Multivariate Analysis, 2006, v. 97, № 9, p. 1941–1957.
3. *Fujikoshi Y.*, *Ulyanov V. V.*, *Shimizu R.* L_1-norm error bounds for asymptotic expansions of multivariate scale mixtures and their applications to Hotellings generalized T_0^2. — J. Multivariate Analysis, 2005, v. 96, № 1, p. 1–19.
4. *Ulyanov V. V.*, *Wakaki H.*, *Fujikoshi Y.* BerryEsseen bound for high dimensional asymptotic approximation of Wilks Lambda distribution. — Statistics & Probability Letters, 2006, v. 76, № 12, p. 1191–1200.