ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2014

Н. В. Данилова, **Е. Н. Галицына**, **М. А. Зайцева** (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Финансовые расчеты на (B,S)-рынке с динамическими изменяющимися параметрами.**

В работе приводится алгоритм расчета справедливой цены на (B,S)-рынке с динамически изменяющимися параметрами в случае стратегии с дивидендами. Кроме этого производится расчет форвардной и фьючерсной цен. Рассмотрим модель (B,S)-рынка:

$$\begin{cases} S_n = S_{n-1}(1+\mu_n+\delta_n\varepsilon_n), \\ B_n = B_{n-1}(1+r_n). \end{cases}$$

Процесс $(S_n)_{n=0}^N$ описывает стоимость акции, процесс $(B_n)_{n=0}^N$ описывает величину банковского счета. Значения S_0, B_0 известны. Источником случайности является последовательность независимых случайных величин $(\varepsilon_n)_{n=0}^N$ таких, что $\varepsilon_n \in \{-1,1\}$. Рассматривается естественная фильтрация $F_0=\{\varnothing,\Omega\}$, $F_n=\sigma(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$. Параметры модели: r_n — процентная ставка, $\delta_n>0$ — волатильность, μ_n — снос.

В случае портфеля с дивидендами балансовое соотношение имеет вид:

$$\Delta\Big(\frac{X_n}{B_n}\Big) = \gamma_n\Big(\Delta\Big(\frac{S_n}{B_n}\Big)+\frac{\Delta D_n}{B_n}\Big), \qquad n=1,2,\ldots,N.$$

$$\Delta D_n = cS_{n-1}, \qquad c\equiv \mathrm{const}\,.$$

Определим меру $\widetilde{P}$ следующим образом:

$$\widetilde{P}\{\varepsilon_n=1\} = \widetilde{p}_n = \frac{r_n-\mu_n-c(1+\mu_n)}{2\delta_n(1+c)}+\frac{1}{2},$$
$$\widetilde{P}\{\varepsilon_n=-1\} = 1-\widetilde{p}_n = \widetilde{q}_n = \frac{1}{2}-\frac{r_n-\mu_n-c(1+\mu_n)}{2\delta_n(1+c)}.$$

Тогда относительно меры $\widetilde{P}$ дисконтированный капитал портфеля является мартингалом.

Ограничения на параметры:

$$\max\Big\{-\delta_n+\frac{r_n-c}{1+c},\delta_n-1\Big\} < \mu_n < \delta_n+\frac{r_n-c}{1+c}.$$

Пусть $M_1<M_2$. Введем два барьера M_1, M_2 такие, что:

$$\begin{aligned} r_n &= \widehat{r}_1 I(S_{n-1}<M_1)+\widehat{r}_2 I(S_{n-1}\geqslant M_1), \\ \mu_n &= \widehat{\mu}_1 I(S_{n-1}<M_1)+\widehat{\mu}_2 I(S_{n-1}\geqslant M_1), \\ \delta_n &= \widehat{\delta}_1 I(S_{n-1}<M_2)+\widehat{\delta}_2 I(S_{n-1}\geqslant M_2). \end{aligned}$$

Рассматривается задача расчета справедливой цены X_0 финансового обязательства для портфеля с дивидендами:

$$\begin{cases} \min\limits_{\gamma} X_0, \\ \Delta\Big(\dfrac{X_n}{B_n}\Big) = \gamma_n\Big(\Delta\Big(\dfrac{S_n}{B_n}\Big) + c\dfrac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\Big), \\ X_N \geqslant f_N. \end{cases}$$

Пусть $X_N = f_N(S_N) = g_N(S_N)$. Тогда

$$X_{n-1} = g_{n-1}(S_{n-1})$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1+\widehat{r}_1}\big(g_n(S_{n-1}(1+\widehat{\mu}_1+\widehat{\delta}_1))\,\widetilde{p}_1 + g_n(S_{n-1}(1+\widehat{\mu}_1-\widehat{\delta}_1))\,\widetilde{q}_1\big), \text{ если } S_{n-1}\leqslant M_1, \\ \dfrac{1}{1+\widehat{r}_2}\big(g_n(S_{n-1}(1+\widehat{\mu}_2+\widehat{\delta}_1))\,\widetilde{p}_2 + g_n(S_{n-1}(1+\widehat{\mu}_2-\widehat{\delta}_1))\,\widetilde{q}_2\big), \text{ если } M_1\leqslant S_{n-1}\leqslant M_2, \\ \dfrac{1}{1+\widehat{r}_1}(g_n(S_{n-1}(1+\widehat{\mu}_2+\widehat{\delta}_2))\widetilde{p}_3 + g_n(S_{n-1}(1+\widehat{\mu}_2-\widehat{\delta}_2))\widetilde{q}_3) \text{ если } S_{n-1}\leqslant M_2. \end{cases}$$

Формула для расчета форвардной цены имеет вид: $F_n = \dfrac{S_n}{\mathbf{E}^*(B_n/B_N\,|\mathcal{F}_n)}$.

Формула для расчета фьючерсной цены имеет вид: $\varphi_n = \mathbf{E}^*(S_n|\mathcal{F}_n)$.

П р и м е р. Пусть $\mu = r$.

Начальные данные: $r_1 = 0,2$; $r_2 = 0,15$; $\delta_1 = 0,1$ $\delta_2 = 0,05$; $S_0 = 6$; $k = 6$; $c = 0$; $N = 5$; $M_1 = 7$; $M_2 = 8$; $\beta = 0,5$.

В результате программного расчета справедливых цен для портфеля с дивидендами, форвардного и фьючерсного контрактов мы получили следующие результаты:

Справедливая цена для портфеля с дивидендами (европейский тип): $X_0 = 26,120$.

Значение форвардной цены в начальный момент времени: $F_0 = 12,86$.

Значение фьючерсной цены в начальный момент времени: $\varphi_0 = 12,84$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мельников А. В.* Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. М.: ТВП, 1997.
2. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: Фазис, 2004.
3. *Merton R. C.* Theory of rational option pricing. — Bell J. Econom. Manag. Sci., 1973, Spring, № 4, p. 141–183.