ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2014

В. И. Самарин, Т. Ю. Яковенко, Н. Ф. Якунина (Сочи, СГУ). **Нечеткие разностные уравнения второго порядка.**

Нечетким разностным уравнением будем называть разностное уравнение, хотя бы один из коэффициентов которого есть нечеткая функция, либо нечеткое число.

Все основные понятия (различных видов решений разностных уравнений с четкими коэффициентами [1], [2]) справедливы для разностных уравнений с нечеткими коэффициентами, при этом их решения являются либо нечеткими функциями, либо семейством нечетких функций. Начальные условия, при которых ищется частное решение уравнения, являются также нечеткими величинами.

Для применения известных методов решения разностных уравнений с четкими коэффициентами к решению уравнений с нечеткими коэффициентами той же структуры наиболее удобным является сведение таких уравнений к интервальным разностным уравнениям.

Для решения нечетких линейных разностных уравнений можно воспользоваться следующим способом:

1) Составить и решить четкое разностное уравнение с четкими начальными условиями, соответствующее данному нечеткому разностному уравнению;

2) Представить нечеткое разностное уравнение и нечеткие начальные условия в интервальной форме и, решив полученную задачу, найти решение поставленной задачи в виде $(L\text{-}R)$-типа для любого $\alpha \in [0,1]$

3) Полученное нечеткое решение представить в интервальной форме.

Проиллюстрируем решение нечетких линейных разностных уравнений второго порядка на конкретных примерах.

Пример 1. $y(x+2) - \{9; 0{,}3; 0{,}2\}y(x+1) + \{14; 0{,}4; 0{,}3\}y(x) = \{18; 0{,}2; 0{,}3\}x - \{65; 0{,}1; 0{,}2\}$, $\widetilde{y}(0) = \{1; 0{,}2; 0{,}1\}$, $\widetilde{y}(1) = \{33; 1; 2\}$.

Решение.

1) Решим соответствующую четкую задачу с четкими начальными условиями: $Y(x+2) - 9y(x+1) + 14y(x) = 18x - 65$, $y(0) = 1$, $y(1) = 33$.

Решение $y(x)$ соответствующего однородного разностного уравнения будем искать в виде: $y(x) = \lambda^x$. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$; а *общее решение однородного уравнения* $\overline{y}(x) = C_1 2^x + C_2 7^x$. Частное решение неоднородного уравнения $y^* = Ax + B = 3x - 8$. Общее решение неоднородного уравнения $y_{\text{общ}}(x) = \overline{y}(x) + y^* = C_1 2^x + C_2 7^x + 3x - 8$. С учетом четких начальных условий $y(0) = 1$, $y(1) = 33$ решение четкого неоднородного разностного уравнения $y(x) = 5 \cdot 2^x + 4 \cdot 7^x + 3x - 8$.

2) Представим нечеткую задачу в интервальной форме и найдем ее решение:

$$y(x+2) - 8{,}8y(x+1) + 14{,}3y(x) = 18{,}3x - 64{,}9, \qquad y(0) = 1{,}1, \quad y(1) = 35, \tag{1}$$

$$y(x+2) - 9{,}3y(x+1) + 13{,}6y(x) = 17{,}8x - 65{,}2, \qquad y(0) = 0{,}8, \quad y(1) = 32. \tag{2}$$

Решим нечеткое квадратное характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \{9;0{,}3;0{,}2\}\lambda + \{14;0{,}4;0{,}3\} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 + \{-9{,}2;-8{,}7\}\lambda + \{13{,}6;14{,}3\} = 0,$$

используя анализ корней квадратного уравнения в нечетком множестве, разработанный И. Л. Макаровой и В. И. Самариным

Больший корень

$$\lambda_2' = \frac{8,7 + \sqrt{8,7^2 - 4 \cdot 14,3}}{2} = 6,5; \qquad \lambda_2'' = \frac{9,2 + \sqrt{9,2^2 - 4 \cdot 13,6}}{2} = 7,35;$$
$$6,5 \leqslant \lambda_2 \leqslant 7,35.$$

Меньший корень

$$\lambda_1' = \frac{8,7 - \sqrt{9,2^2 - 4 \cdot 13,6}}{2} = 1,6; \qquad \lambda_1'' = \frac{9,2 - \sqrt{8,7^2 - 4 \cdot 14,3}}{2} = 2,45;$$
$$1,6 \leqslant \lambda_1 \leqslant 2,45.$$

Учитывая начальные условия в (1) и (2), находим решение задачи в интервальной форме:

$$\widetilde{y} = \begin{cases} y_R = 4,215 \cdot 2,45^x + 3,935 \cdot 7,35^x + 2,815x - 7,04; \\ y_L = 3,833 \cdot 1,6^x + 4,644 \cdot 6,5^x + 3,358x - 7,677. \end{cases}$$

П р и м е р 2. При других начальных условиях в уравнениях (1) и (2):

$$y(x+2)8,8y(x+1) + 14,3y(x) = 18,3x - 64,9, \qquad y(0) = 1,1; \quad y(1) = 33,2,$$
$$y(x+2)9,3y(x+1) + 13,6y(x) = 17,8x - 65,2, \qquad y(0) = 0,8; \quad y(1) = 32,9.$$

получим решение задачи в интервальной форме:

$$\widetilde{y} = \begin{cases} y_R = 4,572 \cdot 2,45^x + 3,68 \cdot 7,35^x + 2,815x - 7,04; \\ y_L = 3,649 \cdot 1,6^x + 4,828 \cdot 6,5^x + 3,358x - 7,677. \end{cases}$$

Приведем сравнение значений $\widetilde{y}$ на отрезке [0, 2] в точках $x = 0$; $x = 0,25$; $x = 0,5$; $x = 1$; $x = 2$ в примерах 1 и 2:

		$X = 0$	$X = 0,25$	$X = 0,5$	$X = 1$	$X = 2$
Пример 1	y_R	1,1	5,416	11,633	35,025	236,469
	y	1	5,202	11,154	33	214
	y_L	0,8	4,889	10,690	32	205,060
Пример 2	y_R	1,1	5,259	11,197	33,201	218,786
	y	1	5,202	11,154	33	214
	y_L	0,8	4,976	10,927	32,901	212,363

В обоих случаях $y_L \leqslant y \leqslant y_R$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.-Л: ГИТТЛ, 1952,479 с.
2. *Миролюбов А. А.*, *Солдатов М. А.* Линейные неоднородные разностные уравнения. Горький, 1980, 106 с.
3. *Ибрагимов В. А.* Элементы нечеткой математики. Баку, АГНА, 2010, 394 с.