ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 **МАТЕМАТИКИ** **Выпуск 5**
2014

В. Н. Соболев (Москва, РГТЭУ). **Об одном разложении характеристической функции.**

В [1] построены асимптотические разложения для плотностей в центральной предельной теореме. При их построении использовалось разложение характеристической функции из [2, с. 162]. В работе, представленной данным сообщением, доказывается в некотором смысле аналогичное разложение, особенностью которого является разбиение слагаемого, содержащего $|t|^{m+1}$, на две части. Одна часть связана только с абсолютным моментом порядка $m+1$ и ограниченной величиной γ. Во вторую часть входят моментные характеристики порядка не выше $m-1$. Такое представление позволяет в некоторых случаях строить асимптотические разложения в центральной предельной теореме с более тонкими оценками остаточных частей данных разложений таким же способом как и в [1].

Утверждение. *Пусть* f *— характеристическая функция распределения* $\mathbf{P}$, *для которого существует абсолютный момент порядка* $(m+1)\geqslant 2$. *Тогда справедливо представление*

$$f(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{k=0}^{m}\theta_k(it)^k+\gamma\,(\beta_{m+1}+\frac{1}{2}\|\theta_{m-1}\|)|t|^{m+1}+\gamma\frac{1}{2}\|\theta_m\||t|^{m+2},$$

где $|\gamma|\leqslant 1$, $\theta_k=\sum_{j=0}^{[k/2]}a_{k-2j}b_{2j}$ *и* $\|\theta_k\|=\sum_{j=0}^{[k/2]}|a_{k-2j}||b_{2j}|$ *для* $0\leqslant k\leqslant m$, $b_{2j}=\frac{(-1)^j}{2^j j!}$, $a_k=\alpha_k/k!$, *а* α_k *—* k*-й момент распределения* $\mathbf{P}$, β_{m+1} *—* $(m+1)$*-й абсолютный момент распределения* $\mathbf{P}$ *деленный на* $(m+1)!$.

Доказательство. Пусть $t\in\mathbf{R}$ и $\omega=it$. Хорошо известны разложения для характеристической функции $f(t)=\sum_{k=0}^{m}a_k\omega^k+\rho_m(t)$, где $|\rho_m(t)|\leqslant\beta_{m+1}|t|^{m+1}$, и экспоненты $e^{\frac{t^2}{2}}=e^{-\omega^2/2}=\sum_{k=0}^{\infty}b_{2j}\omega^{2j}$. Их произведение $f(t)e^{\frac{t^2}{2}}=\sum_{j=0}^{\infty}b_{2j}\omega^{2j}\sum_{k=0}^{m}a_k\omega^k+\rho(t)e^{\frac{t^2}{2}}$ преобразуем к виду $f(t)e^{\frac{t^2}{2}}=\sum_{k=0}^{m}\theta_k\omega^k+\sum_{k=m+1}^{\infty}\theta_k^{(m)}\omega^k+\rho_m(t)e^{\frac{t^2}{2}}$, где $\theta_k=\sum_{j=0}^{[k/2]}a_{k-2j}b_{2j}$ для $0\leqslant k\leqslant m$ и $\theta_k^{(m)}=\sum_{j=0;\,2j\geqslant k-m}^{[k/2]}a_{k-2j}b_{2j}$, $k>m$, разбив второе слагаемое на две части

$$\sum_{k=0}^{\infty}\theta_{m+1+k}^{(m)}\omega^{m+1+k}=\omega^{m+1}\sum_{k=0}^{\infty}\theta_{m+1+2k}^{(m)}\omega^{2k}+\omega^{m+1}\sum_{k=0}^{\infty}\theta_{m+2+2k}^{(m)}\omega^{2k+1}.$$

Рассмотрим отдельно величины $\theta^{(m)}_{m+l} = \sum\limits_{j=0;\,2j\geqslant l}^{[(m+l)/2]} \alpha_{m+l-2j} b_{2j}$ при четном и нечетном $l \geqslant 1$.

I. Случай нечетного l. Положим $l = 2k+1$. Тогда

$$\theta^{(m)}_{m+l} = \sum_{j=0;\,2j\geqslant 2k+1}^{[(m+2k+1)/2]} a_{m+2k+1-2j} b_{2j} = \sum_{j=k+1}^{[(m-1)/2]+k+1} a_{m+2k+1-2j} b_{2j} = \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} a_{m-1-2j} b_{2(k+1+j)}$$

Поскольку $|b_{2(k+1+j)}| \leqslant |b_{2(k+1)}||b_{2j}| \leqslant |b_2||b_{2k}||b_{2j}| = 0,5|b_{2k}||b_{2j}|$, то

$$|\theta^{(m)}_{m+l}| \leqslant |b_{2(k+1)}| \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} |a_{m-1-2j}||b_{2j}| = |b_{2(k+1)}|\|\theta_{m-1}\| = |b_{l+1}|\|\theta_{m-1}\|,$$

$$\left|\omega^{m+1}\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{(m)}_{m+1+2k}\omega^{2k}\right| \leqslant 0,5\|\theta_{m-1}\||t|^{m+1}\sum_{k=0}^{\infty}|b_{2k}||t|^{2k} = 0,5\|\theta_{m-1}\||t|^{m+1}e^{t^2/2}.$$

II. Случай четного l. Положим $l = 2(k+1)$. Тогда

$$\theta^{(m)}_{m+l} = \sum_{j=0;\,2j\geqslant 2k+2}^{[(m+2k+2)/2]} a_{m+2k+2-2j} b_{2j} = \sum_{j=k+1}^{[m/2]+k+1} a_{m-2(j-k-1)} b_{2j} = \sum_{j=0}^{[m/2]} a_{m-2j} b_{2(k+1+j)}.$$

Действуя аналогично случаю нечетного l, получаем

$$|\theta^{(m)}_{m+l}| \leqslant |b_{2(k+1)}| \sum_{j=0}^{[m/2]} |a_{m-1-2j}||b_{2j}| = |b_{2(k+1)}|\|\theta_m\| \leqslant 0,5|b_{2k}|\|\theta_m\| = 0,5|b_{2k}|\|\theta_m\|,$$

$$\left|\omega^{m+1}\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{(m)}_{m+2+2k}\omega^{2k+1}\right| \leqslant 0,5\|\theta_m\||t|^{m+2}\sum_{k=0}^{\infty}|b_{2k}||t|^{2k} = 0,5\|\theta_m\||t|^{m+2}e^{t^2/2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев В.Н.* Об асимптотических разложениях в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 54, в. 3, с. 490–505.
2. *Сенатов В. В.* Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом «Либроком», 2009.