ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2014

Е. Е. Дьяконова (Москва, МИАН). **Условная предельная теорема для многотипного критического ветвящегося процесса в случайной среде.**

Пусть $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), \dots, Z_p(n))$ $(n = 0, 1, \dots)$ — процесс Гальтона–Ватсона с p типами частиц в случайной среде $\zeta = \{\zeta_n, n = 0, 1, \dots\}$, которая задается последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\zeta_n, n = 0, 1, \dots,\}$ принимающих значения из подмножества Θ множества действительных чисел. Каждому значению $\theta \in \Theta$ поставлен в соответствие p-мерный вектор $\mathbf{f}^{(\theta)}(\mathbf{s}) = (f_1^{(\theta)}(\mathbf{s}), \dots, f_p^{(\theta)}(\mathbf{s}))$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)$, $0 \leqslant s_i \leqslant 1$, $i = 1, \dots, p$, многомерных вероятностных производящих функций $f_i^{(\theta)}(\mathbf{s})$, $i = 1, \dots, p$.

Процесс $\mathbf{Z}(n)$, $n = 0, 1, \dots$, в случайной среде ζ описывает эволюцию популяции частиц $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), \dots, Z_p(n))$, где $Z_i(n)$, $i = 1, \dots, p$, — число частиц типа i в n-м поколении. А именно, предполагается, что если $\zeta_n = \theta$, $\theta \in \Theta$, то каждая из $Z_i(n)$ частиц типа i, $i = 1, \dots, p$, из n-го поколения размножается согласно многомерной производящей функции $f_i^{(\theta)}(\mathbf{s})$ независимо от всех других частиц.

Обозначим $M^{(\theta)} = (M^{(\theta)}(i,j))_{i,j}^p$, $M^{(\theta)}(i,j) \in (0, \infty)$, матрицу средних значений, соответствующую $\mathbf{f}^{(\theta)}(\mathbf{s})$. Предполагается, что все матрицы $M^{(\theta)}$, $\theta \in \Theta$, имеют общий правый положительный собственный вектор $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)$, $|\mathbf{u}| = \sum_{i=1}^p u_i = 1$, соответствующий их перроновым корням. Пусть ρ_n — перронов корень матрицы $M^{(\zeta_n)}$, $\mathbf{1}$ — единичный p-мерный вектор. Положим $X_i = \ln \rho_{i-1}$, $i \geqslant 1$, $S_0 = 1$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = (f_1(\mathbf{s}), \dots, f_p(\mathbf{s})) = \mathbf{f}^{\zeta_0}(\mathbf{s})$,

$$b_{ij} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial s_j^2}(\mathbf{1}), \qquad i, j \in \{1, \dots, p\}, \qquad \eta = \frac{1}{\rho_0^2} \max_{i,j} b_{ij} \in (0, \infty),$$

$[x]$ — целая часть числа x, $x^+ = \max\{0, x\}$. Предполагается, что фиксировано начальное значение процесса $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}$, $|\mathbf{z}| \neq 0$. Далее символ $\Longrightarrow$ означает слабую сходимость для любого фиксированного $v \in (0,1)$ в пространстве $D[v,1]$ (состоящем из функций, заданных на $[v,1]$, непрерывных справа и имеющих пределы слева), оснащенном топологией Скорохода.

Теорема. *Если* $\mathbf{E} \ln \rho_0 = 0$, $\mathbf{E}(\ln \rho_0)^2 \in (0, \infty)$ *и для некоторого* $\varepsilon > 0$ $\mathbf{E}(\ln^+ \eta)^{2+\varepsilon} < \infty$, *то при* $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{(\mathbf{Z}([nt]), \mathbf{u})}{\exp\{S_{[nt]}\}},\ t \in (0,1] \;\middle|\; |\mathbf{Z}(n)| \neq 0 \right\} \Longrightarrow \{Y(t),\ t \in (0,1]\ \},$$

где $\{Y(t)\}$ *— случайный процесс с постоянными положительными траекториями.*

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Фундаментальные научные исследования».