

**А. В. Булинский** (Москва, МФТИ). **Обобщение некоторых информационно-энтропийных характеристик для состояний на алгебрах фон Неймана.**

В квантовой теории информации значительное внимание уделяется изучению различных каналов передачи информации и их пропускных способностей. При этом существенно учитываются корреляции между частями составных квантовых или квантово-классических систем, например, относящихся ко входу канала, его выходу и окружающим их вспомогательным системам. Для этого используются различные корреляционные меры, выражающиеся через информационно-энтропийные характеристики состояний систем, см., например, [1], [2]. Для квантовой системы состояния обычно отождествляются с операторами плотности  $\rho$  в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  (с неотрицательными линейными операторами, для которых  $\text{Tr} \rho = 1$ ), т. е.  $\rho \in S(\mathcal{H})$ , является нормальным состоянием алгебры  $B(\mathcal{H})$  всех ограниченных линейных операторов в  $\mathcal{H}$ . Ограниченным наблюдаемым сопоставляются самосопряженные элементы  $B(\mathcal{H})$ , а каналам  $\Phi$  — вполне положительные аффинные отображения пространств состояний, сохраняющие след. В основе большинства энтропийных характеристик лежит квантовая энтропия фон Неймана  $H(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log(\rho))$  для состояния  $\rho$ , относительная энтропия  $H(\rho||\sigma) = -\text{Tr}(\rho(\log \rho - \log \sigma))$  для пары состояний  $\rho, \sigma$  и взаимная информация. Заметим, что ранее в литературе основное внимание уделялось моделям конечномерных систем, для которых  $\dim \mathcal{H} < \infty$ , см. [1],[2].

В последние годы возникла необходимость обобщения результатов, установленных для конечномерных систем, на бесконечномерный случай. Задачи такого рода оказались нетривиальными. В этой связи А. С. Холево и М. Е. Широковым было введено в [3] обобщение взаимной и когерентной информации для квантовых каналов, корректное в смысле отсутствия формальных разностей  $\infty - \infty$ . Опираясь на эту работу, А. А. Кузнецова в [4] ввела обобщение условной энтропии  $H(\rho_A|\rho_B) := H(\rho_A) - H(\rho_{AB}||\rho_A \otimes \rho_B)$ , корректное при конечности  $H(\rho_A)$ . В конечномерном случае это совпадает с прежним выражением  $H(\rho_{AB}) - H(\rho_B)$ . Здесь  $\rho_{AB} \in S(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$  является состоянием системы, состоящей из подсистем  $A$  и  $B$  с гильбертовыми пространствами  $\mathcal{H}_A$  и  $\mathcal{H}_B$ , а  $\rho_A$  и  $\rho_B$  — соответствующие частичные (маргинальные) состояния подсистем. С помощью аппроксимаций состояниями конечного ранга было показано, что для этой условной энтропии как функции состояний сохраняются известные свойства монотонности, выпуклости и субаддитивности. Тем самым удалось продвинуться в направлении бесконечномерных обобщений, инициированных работами А. С. Холево по изучению гауссовских каналов и бозонных квантовых систем.

Указанные обобщения относятся к алгебрам  $B(\mathcal{H})$  в сепарабельном  $\mathcal{H}$ . Заслуживает внимания и возможное направление дальнейших обобщений, когда модель квантовой системы использует состояния на более общей алгебре фон Неймана, нежели  $B(\mathcal{H})$ , см., например, [5]. Такие модели широко распространены в квантовой статистической механике и квантовой теории поля, см. [6]. В данной работе рассматривается возможность обобщений на класс алгебр фон Неймана, обладающих аппроксимационным

свойством Хаагерупа. В серии недавних работ М. Касперса, А. Скальского, Р. Окаясу и Р. Томацу (см., например, [7]) были изучены разные формы этого аппроксимационного свойства применительно не только к конечным, но и бесконечным алгебрам фон Неймана. В частности, таким свойством обладает любая алгебра  $B(\mathcal{H})$ , как и всякая инъективная алгебра фон Неймана, об инъективных алгебрах см. [8]

В докладе основное внимание уделяется следующим обобщениям.

**Предложение 1.** *Упомянутые энтропийные характеристики, в частности, условную энтропию, по аналогии с аппроксимацией в [4], можно распространить на точные нормальные состояния алгебры фон Неймана  $M$ , обладающей аппроксимационным свойством Хаагерупа.*

Наряду с энтропией фон Неймана в различных задачах квантовой информации важную роль играют квантовые относительные энтропии Реньи, о различных модификациях которых см. [9].

**Предложение 2.** *Для точных нормальных состояний рассматриваемых алгебр фон Неймана  $M$  можно ввести также аналоги относительных квантовых энтропий Реньи и их модификаций (расходимостей Реньи).*

Понятия квантового канала и пропускных способностей также естественно переносить на более общий алгебраический случай. Проведенное рассмотрение позволяет предположить, что справедлива следующая

**Гипотеза.** *Для обобщенного в контексте инъективных операторных алгебр  $M$  измерительного канала с бесконечным классическим алфавитом справедливы аналоги оценок классической пропускной способности, установленные для случая алгебр  $B(\mathcal{H})$ .*

Работа выполнена при частичной поддержке научного проекта РФФИ 12-01-00319-а.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холево А. С. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.
2. Wilde M. Quantum Information Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013.
3. Холево А. С., Широков М. Е. Взаимная и когерентная информация для бесконечномерных квантовых систем. — Проблемы передачи информ., 2010, т. 46, в. 3, с. 3–21.
4. Кузнецова А. А. Условная энтропия бесконечномерных квантовых систем. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 4, с. 782–790.
5. Berta M., Furrer F., Scholz V. B. The smooth entropy formalism on von Neumann algebras. arXiv: 1107.5460 [quant-physics] July 2011.
6. Браттели О., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. Т. 1. М.: Мир, 1982.
7. Caspers M., Okayasu R., Skalski A., Tomatsu R. Generalisations of the Haagerup approximation property to arbitrary von Neumann algebras. — C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 2014, v. 352, № 6, p. 507–550.
8. Takesaki M. Theory of Operator Algebras III. Berlin etc.: Springer, 2010. (Ser. Encyclopedia of Mathematical Sciences V. 127.)
9. Tomamichel M., Berta M., Hayashi M. Relating different quantum generalizations of the conditional Rényi entropy. — J. Math. Phys., 2014, v. 55, № 8, 082206.