ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2014

А. Д. Марковский (Москва, МГУЛ). **Классические алгоритмы деления как алгоритмы разложения на множители дуальных чисел.**

В последнее время прояснилась органическая вязь между принципами распараллеливания вычислительных процессов и мультипликативных методов вычислений [1–3]. В работах [4], [5] такая связь демонстрируется на примерах построения общих схем параллельного деления вещественных и комплексных чисел в произвольном вычислительном базисе [6]. В работе [6] указано, что множество $B = \{b(j) \in \mathbf{R} \,|\, j \in \mathbf{N}\}$ является (аддитивным) вычислительным базисом на поле $\mathbf{R}$ вещественных чисел тогда и только тогда, когда оно имеет нуль своей предельной точкой.

Между тем, ни одна из схем новых алгоритмов деления вещественных и двойных чисел, рассмотренных в работах [1–5], не распространяется на классические алгоритмы деления, известные из школы. Общую схему классических алгоритмов деления числа $x \in \mathbf{R}$ на число $a \neq 0$ в произвольном вычислительном базисе B можно представить в следующем виде.

Схема. $(\forall a \in \mathbf{R})$ $(\forall x \in \mathbf{R})$ $(\forall k \in \mathbf{N})$ $(\forall s_k \in \{-1, 0, 1\})$ $(\forall j_k \in \mathbf{N})$ $(\forall b(j_k) \in B)$

$$\begin{bmatrix} x_0 = x, \\ x_k = x_{k-1} - s_k b(j_k) a, \\ \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[a \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \sum_{k=1}^{\infty} s_k b(j_k) \right].$$

Следующая теорема выявляет «мультипликативную» природу схемы.

Теорема 1. *Общая схема классических алгоритмов деления в вычислительном базисе* $B = \{b(j) \in \mathbf{R} \,|\, j \in \mathbf{N}\}$ *является одновременно схемой мультипликативных разложений дуального числа* $a + xi \in D_0$, $D_0 = \{a + xi \,|\, a \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R},\ i^2 = 0)$ — *кольцо дуальных чисел. Реализуемые схемой мультипликативные разложения имеют вид*

$$a \neq 0 \Rightarrow a + xi = a \prod_{k=0}^{\infty} (1 + s_k b(j_k) i). \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим постоянную последовательность $a_k = a$, $k \in \mathbf{N}_0$. Согласно двум первым условиям схемы, справедливо рекуррентное соотношение $(\forall k \in \mathbf{N}_0)$ $a_k + x_k i = a_{k-1} + x_{k-1} i - s_k b(j_k) a_{k-1} i$. С другой стороны, $a_{k-1} + x_{k-1} i - s_k b(j_k)\, a_{k-1} i = (a_{k-1} + x_{k-1} i)(1 - s_k b(j_k)\, i)$, так как $i^2 = 0$. Следовательно, $(\forall_k \in \mathbf{N}_0)$ $a_k + x_k i = (a_{k-1} + x_{k-1} i)(1 - s_k b(j_k)\, i)$. Отсюда по индукции, с учетом первого условия схемы и равенства $a_0 = a$, устанавливаем, что

$$(\forall k \in \mathbf{N}_0) \quad a_k + x_k i = (a + xi) \prod_{m=1}^{k} \big(1 - s_m b(j_m)\, i\big). \qquad (2)$$

При $a = 0$ все три условия схемы совместны только при $x = 0$, причем равенство (2) имеет вид $0 = 0$. При $a \neq 0$, переходя в (2) к пределу при $k \to \infty$ и учитывая третье условие $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ схемы, а также соотношение $\lim_{k\to\infty} a_k = a$, получим

$$a \neq 0 \Rightarrow a+0i = (a+xi)\prod_{k=1}^{\infty}(1-s_k b(j_k)\, i) \Leftrightarrow a \neq 0 \Rightarrow a+xi = a\prod_{k=1}^{\infty}(1-s_k b(j_k)\, i)^{-1}. \quad (3)$$

Поскольку $(1-s_k b(j_k)\, i)^{-1} = 1+s_k b(j_k)\, i$, из (3) следует (1). Теорема доказана.

Таким образом, продемонстрирован следующий замечательный факт. Классический (школьный) метод деления так же, как и новые методы деления [4, 5], имеет «мультипликативную» природу. Нахождение частного x/a от деления вещественных чисел соответствует разложению на определенные сомножители дуального числа $a+xi$, $i^2=0$, $a\neq 0$, в кольце дуальных чисел D_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марковский А. Д.*, *Меликов Г. Г.* Мультипликативные алгоритмы типовых вычислений и организация устройств на их основе. — Научные труды МЛТИ, 1989, в. 217, с. 5–23.
2. *Марковский А. Д.* Параллельные алгоритмы деления на основе мультипликативных разложений действительных чисел. М.: ИКИ АН СССР, 1990, 50 с.
3. *Марковский А. Д.* Логарифмические машинные арифметики и параллельная реализация преобразования Лоренца. — В сб.: Тезисы докладов XII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». М.: Изд-во МГУ, 1999.
4. *Марковский А. Д.* Предельные базисные схемы как основа классификации и оптимизации вычислительных алгоритмов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 4, с. 582–584.
5. *Марковский А. Д.* Симметричная предельная схема параллельного деления комплексных чисел в произвольном вычислительном базисе. — Обозрение прикл. и промышл. матем., т. , в. , с. .
6. *Марковский А. Д.* Вычислительные базисы для основных числовых систем. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 3, с. 453–455.