ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2014

Н. А. М а н а к о в а (Челябинск, ЮУрГУ). **Стохастическая модель Девиса в пространстве «дифференцируемых шумов».**

Пусть $D \subset \mathbf{R}^d$ $(d \in \mathbf{N})$ — ограниченная область с границей ∂D класса C^∞. Рассмотрим стохастическую модель Девиса

$$\Delta\eta(x,t) = \eta(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial D \times [0,T], \tag{1}$$

$$(\lambda - \Delta) \overset{\circ}{\eta} = (\beta\Delta - \alpha\Delta^2)\eta + w, \quad \lambda, \beta \in \mathbf{R}, \quad \alpha \in \mathbf{R}_+ \tag{2}$$

с ослабленным условием Шоуолтера–Сидорова

$$\lim_{t \to 0+} (\lambda - \Delta)(\eta(t) - \xi_0) = 0, \tag{3}$$

где $\eta = \eta(t)$ — искомый, $w = w(t)$ — заданный случайный процесс на интервале $(0,T)$. К исследованию стохастических дифференциальных уравнений в частных производных приводят многие прикладные задачи. Все больший интерес вызывает исследование стохастических уравнений соболевского типа [1, 2]. В последнее время возник и активно развивается [3, 4] новый подход к исследованию стохастических уравнений, где под «белым шумом» понимается производная Нельсона–Гликлиха винеровского процесса.

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел, наделенное борелевой σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ называется *случайной величиной*. Множество случайных величин образует гильбертово пространство $\mathbf{L}_2$ со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\,\xi_1\xi_2$. Пусть $\mathfrak{I} \subset \mathbf{R}$ — некоторый промежуток. Рассмотрим два отображения: $f : \mathfrak{I} \to \mathbf{L_2}$ и $g : \mathbf{L_2} \times \Omega \to \mathbf{R}$. Отображение $\eta : \mathfrak{I} \times \Omega \to \mathbf{R}$, имеющее вид $\eta = \eta(t,\omega) = g(f(t),\omega)$, назовем (*одномерным*) *случайным процессом.*

Рассмотрим симметрическую производную в среднем [5] $\overset{o}{\eta} = \frac{1}{2}(D + D_*)\eta$, которую будем называть *производной Нельсона–Гликлиха* [4]. Через $\overset{o}{\eta}{}^{(l)}$ обозначим l-ю производную Нельсона–Гликлиха случайного процесса η, $l \in \mathbf{N}$.

Пусть $\{\lambda_j\}$ — последовательность собственных чисел оператора Лапласа Δ (определенного в D с однородными граничными условиями Дирихле), занумерованная по невозрастанию с учетом их кратности, $\{\varphi_j\}$ — соответствующие ортонормированные (в смысле $L_2(D)$) собственные функции. Построим оператор $\Lambda = (-1)^{m-1}\Delta^m$ с областью определения $\operatorname{dom}\Lambda = \{W_2^{l+2(m+1)}(D) : \Delta^k u(x) = 0,\ x \in \partial D,\ k \in 0,1,\ldots, m-1\}$, $m \in \mathbf{N}$. Спектр оператора Λ будет состоять из собственных значений вида $|\lambda_j|^m \sim j^{\frac{2m}{d}} \to \infty, j \to \infty$. Считаем, что число $m \in \mathbf{N}$ выбрано таким образом, чтобы ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{-m}$ сходился при фиксированном $d \in \mathbf{N}$. В качестве ядерного ($\mathrm{Tr}K < +\infty$) оператора K возьмем обратный оператор к оператору Λ, собственные числа которого $\nu_j = |\lambda_j|^{-m}$.

Возьмем последовательность независимых случайных процессов $\{\eta_j\}$ и определим K-случайный процесс $\Theta_K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\nu_j}\eta_j(t)\varphi_j$ при условии, что данный ряд равномерно сходится на любом компакте из $\mathfrak{I}$. Введем в рассмотрение производные Нельсона–Гликлиха K-случайного процесса

$$\overset{o}{\Theta}{}^{(l)}_K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\nu_j}\, \overset{o}{\eta}{}^{(l)}_j(t)\varphi_j.$$

Определим пространство $\mathbf{C}_K\mathbf{L}_2$ K-случайных процессов, чьи траектории п. н. непрерывны, и пространства $\mathbf{C}^l_K\mathbf{L}_2$ K-случайных процессов, чьи траектории п. н. непрерывно дифференцируемы по Нельсону–Гликлиху до порядка $l \in \mathbf{N}$.

Определим пространства $\mathfrak{U} = W_2^2(D) \bigcap \overset{o}{W}{}_2^1(D)$, $\mathfrak{F} = L_2(D)$. Фиксируем $\lambda, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и построим операторы $L = \lambda\mathbf{I} - \Delta$, $M = \beta\Delta - \alpha\Delta^2$. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ с $\operatorname{dom} M = \{u \in W_2^4(D) : \Delta u(x,t) = u(x,t) = 0,\ s \in \partial\Omega\}$.

Построим проектор $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$,

$$Q = \begin{cases} \mathbf{I}, \text{ если } \lambda_k \neq \lambda\ \forall k \in \mathbf{N}; \\ \sum\limits_{k \in \mathbf{N}:\ k \neq l} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \text{ если } \exists\, l \in \mathbf{N} :\ \lambda_l = \lambda. \end{cases}$$

Теорема. *При любых* $\lambda, \beta \in \mathbf{R}$, $\tau, \alpha \in \mathbf{R}_+$, *и при любом таком* K*-случайном процессе* $w = w(t)$, *что выполнено* $(\mathbf{I} - Q)w \in \mathbf{C}^1_K\mathbf{L}_2$ *и* $Qw \in \mathbf{C}_K\mathbf{L}_2$, *и любой случайной величине* $\xi_0 \in \mathbf{L}_2$, *не зависящей от* w, *существует единственное решение* $\eta \in \mathbf{C}^1_K\mathbf{L}_2$ *задачи* (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Замышляева А. А.* Стохастические неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка с аддитивным белым шумом. — Вестник ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование, 2012, № 40, в. 14, с. 73–82.
2. *Загребина С. А.* Многоточечная начально-конечная задача для стохастической модели Баренблата–Желтова–Кочиной. — Вестник ЮУрГУ. Сер. Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника, 2013, т. 13, № 4, с. 103–111.
3. *Shestakov A. L.*, *Sviridyuk G. A.* On the Measurement of the «White Noise». — Вестник ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование, 2012, № 27(286), в. 13, с. 99–108.
4. *Свиридюк Г. А.*, *Манакова Н. А.* Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера–Сидорова и аддитивными «шумами». — Вестник ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование, 2014, т. 7, № 1, с. 90–103.
5. *Gliklikh Yu. E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. Heidelberg etc.: Springer, 2011.