О. В. В и с к о в,   **В. И. Х о х л о в**   (Москва, МИ РАН). **Характеризационное свойство тождества Льи для двумерного нормального распределения.**

В [1], [2] были приведены характеризационные тождества для биномиального и отрицательного биномиального распределений. Эти тождества являются аналогами характеризационных тождеств Стейна [3] для нормального и Чена [4] для пуассоновского распределений. Как оказалось, способ, которым в [1], [2] доказывались характеризационные свойства приведенных там тождеств, позволяет доказать также в случае двумерного нормального распределения характеризационное свойство тождества Льи [5], обобщенного в [6].

Тождество Льи в двумерном случае (ср. с формулой (45) в [6]) можно записать в виде:

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} h(\eta_1, \eta_2) = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \mathbf{M}\, h(\eta_1, \eta_2) + \Sigma \begin{pmatrix} \mathbf{M}\, \dfrac{\partial h(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} \\ \mathbf{M}\, \dfrac{\partial h(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где функция $h(x_1, x_2)$ принадлежит классу непрерывно дифференцируемых в $\mathbf{R}^2$ функций.

В [6] утверждается, что если случайный вектор $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p,)$ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \Sigma)$ с вектором математического ожидания $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ и матрицей ковариаций Σ, то выполняется p-мерный вариант тождества (1).

Установлено, что для случая $p = 2$ верно и обратное утверждение, и, стало быть, тождество (1) является характеризационным для двумерного нормального распределения.

Утверждение. *Если соотношение* (1) *на всех функциях* $h(x_1, x_2) \in \mathbf{C}_1$ *выполняется для случайного вектора* (η_1, η_2) *с ковариационной матрицей* Σ, *то этот вектор имеет двумерное нормальное распределение* $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \Sigma)$ *с параметрами* $\mathbf{M}\,\mathbf{a}$ *и матрицей ковариаций* Σ.

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на тех же соображениях, что и доказательства характеризационных свойств тождеств в [1] и [2], однако в качестве экспоненциальной производящей функции моментов в данном случае нужно взять $\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{M}\, e^{\lambda_1\, \eta_1 + \lambda_2\, \eta_2}$. Затем выписываются выражения для частных производных $\partial\varphi/\partial\lambda_1$ и $\partial\varphi/\partial\lambda_2$ и получается система дифференциальных уравнений, решением которой с учетом начальных условий оказывается производящая функция моментов указанного двумерного нормального распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Висков О.В., Прохоров Ю.В., Хохлов В.И.* Характеризационное тождество для биномиального распределения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 2, с. 136–137.

2. *Висков О.В.*, *Прохоров Ю.В.*, *Хохлов В.И.* Характеризационное тождество для распределения Паскаля. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 4, с. 532–533.
3. *Stein C.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. — In: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. II. Probability Theory. Berkeley, CA: Univ. California Press, 1972, p. 583–602.
4. *Chen L. H. Y.* Poisson approximation for dependent trials. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 3, p. 534–545.
5. *Liu J. S.* Siegel's formula via Stein's identities. — Statist. Probab. Lett., 1994, v. 21, is. 3, p. 247–251.
6. *Wei Z.*, *Zhang X.*, *Li T.* On Stein identity, Chernoff inequality, and orthogonal polynomials. — Comm. Statist. Theory Meth., 2010, v. 39, p. 2573–2593.