О. В. Висков, **В. И. Хохлов** (Москва, МИ РАН). **Характеризационное свойство тождества Лью для многомерного нормального распределения.**

Тождество Лью в многомерном случае (ср. с формулой (45) в [2]) можно записать в виде:

$$
\mathbf{M}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \dots\\ \eta_p\end{pmatrix} h(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_p)
$$

$$
= \mathbf{M}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \dots\\ \eta_p\end{pmatrix}\mathbf{M}\, h(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_p) + \Sigma\begin{pmatrix}\mathbf{M}\,\dfrac{\partial h(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_p)}{\partial\eta_1}\\ \mathbf{M}\,\dfrac{\partial h(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_p)}{\partial\eta_2}\\ \dots\\ \mathbf{M}\,\dfrac{\partial h(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_p)}{\partial\eta_p}\end{pmatrix},
$$

где функция $h(x_1,x_2,\dots,x_p)$ принадлежит классу непрерывно дифференцируемых в $\mathbf{R}^p$ функций.

В [2] утверждается, что если случайный вектор $(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_p)$ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(\mathbf{a},\Sigma)$ с вектором математического ожидания $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\dots,a_p)$ и матрицей ковариаций Σ, то выполняется p-мерный вариант тождества (1).

В [5] было установлено, что для случая $p=2$ верно и обратное утверждение, и, стало быть, тождество (1) является характеризационным для двумерного нормального распределения.

В докладе, представленном данным сообщением, будет показано, что это обратное утверждение справедливо и в общем случае произвольного натурального p.

Утверждение. *Если на всех функциях $h(x_1,x_2,\dots x_p)\in\mathbf{C}_1$ тождество Лью выполняется для случайного вектора $(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_p)$ с ковариационной матрицей Σ, то этот вектор имеет p-мерное нормальное распределение $\mathcal{N}(\mathbf{a},\Sigma)$ с параметрами $\mathbf{M}\,\mathbf{a}$ и матрицей ковариаций Σ.*

Доказательство основано на тех же соображениях, что и доказательства характеризационных свойств тождеств в [3] и [4], однако в качестве экспоненциальной производящей функции моментов в данном случае нужно взять

$$
\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)=\mathbf{M}\, h(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_p)=\mathbf{M}\, e^{\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\dots+\lambda_p\eta_p}.
$$

Введем функцию $\psi(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)=\ln\mathbf{M}\, e^{\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\dots+\lambda_p\eta_p}$.

Имеем для каждого $i=1,2,\dots,p$:

$$
\frac{\partial\psi(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)}{\partial\lambda_i}=\frac{\mathbf{M}\,\eta_i\, e^{\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\dots+\lambda_p\eta_p}}{\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)}
$$

Учитывая, что предполагается выполнение тождества Лью, для числителя имеем:

$$\mathbf{M}\,\eta_i\,e^{\lambda_1\,\eta_1+\lambda_2\,\eta_2+\cdots+\lambda_p\,\eta_p}$$
$$= a_i\,\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)+\sigma_{11}\,\lambda_1\,\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)+\sigma_{12}\,\lambda_2\,\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$$
$$+\cdots+\sigma_{1p}\,\lambda_p\,\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p).$$

Стало быть, при каждом из $i=1,2,\ldots,p$:

$$\frac{\partial\psi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)}{\partial\lambda_i}=a_i+\sigma_{11}\,\lambda_1+\sigma_{12}\,\lambda_2+\cdots+\sigma_{1p}\,\lambda_p.$$

Начнем с решения первого обыкновенного дифференциального уравнения с $i=1$:

$$\psi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$$
$$=a_1\lambda_1+\sigma_{11}\,\frac{\lambda_1^2}{2}+\sigma_{12}\,\lambda_1\lambda_2+\cdots+\sigma_{1p}\,\lambda_1\lambda_p+C(\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_p).$$

Постоянную интегрирования $C(\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_p)$, подставив в решение значение $\lambda_1=0$, можем записать в виде $\psi(0,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$. Решение второго уравнения

$$\psi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$$
$$=a_2\lambda_2+\sigma_{21}\,\lambda_1\lambda_2+\sigma_{22}\,\frac{\lambda_2^2}{2}+\cdots+\sigma_{2p}\,\lambda_2\lambda_p+\psi(\lambda_1,0,\lambda_3,\ldots,\lambda_p)$$

после подстановки значения $\lambda_1=0$ с учетом решения первого даст

$$\psi(0,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$$
$$=a_2\lambda_2+\qquad\qquad+\sigma_{22}\,\frac{\lambda_2^2}{2}+\cdots+\sigma_{2p}\,\lambda_2\lambda_p+\psi(0,0,\lambda_3,\ldots,\lambda_p)$$

Продолжая действовать таким же образом, на последнем шаге получим

$$\psi(0,0,\ldots,0,\lambda_p)$$
$$=a_p\lambda_p+\qquad\qquad\qquad\qquad+\sigma_{pp}\,\frac{\lambda_p^2}{2}+\psi(0,0,\ldots,0).$$

Из определения функции ψ следует, что $\psi(0,0,\ldots,0)=\ln 1=0$, и, собирая полученные соотношения «по цепочке», получим (в векторной записи):

$$\psi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_p\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\,(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)\,\Sigma\,\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\cdots\\\lambda_p\end{pmatrix},$$

поскольку $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$, $i,j=1,2,\ldots,p$. Потенцируя, получаем в качестве φ производящую функцию моментов многомерного нормального распределения, указанного в формулировке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liu J. S.* Siegel's formula via Stein's identities. — Statist. Probab. Lett., 1994, v. 21, is. 3, p. 247–251.
2. *Wei Z.* , *Zhang X.* , *Li T.* On Stein identity, Chernoff inequality, and orthogonal polynomials. — Comm. Statist. Theory Meth., 2010, v. 39, p. 2573–2593.
3. *Висков О.В.* , *Прохоров Ю.В.* , *Хохлов В.И.* Характеризационное тождество для биномиального распределения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 2, с. 136–137.
4. *Висков О.В.* , *Прохоров Ю.В.* , *Хохлов В.И.* Характеризационное тождество для распределения Паскаля. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 4, с. 532–533.
5. *Висков О.В.* , *Хохлов В.И.* Характеризационное свойство тождества Лью для двумерного многормального распределения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2014, т. 21, в. 1, с. 44–45.