

О. В. Висков, В. И. Хохлов (Москва, МИ РАН). **Характеризационное свойство тождества Лью для многомерного нормального распределения.**

Тождество Лью в многомерном случае (ср. с формулой (45) в [2]) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_p \end{pmatrix} h(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p) \\ &= \mathbf{M} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_p \end{pmatrix} \mathbf{M} h(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p) + \Sigma \begin{pmatrix} \mathbf{M} \frac{\partial h(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)}{\partial \eta_1} \\ \mathbf{M} \frac{\partial h(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)}{\partial \eta_2} \\ \dots \\ \mathbf{M} \frac{\partial h(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)}{\partial \eta_p} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где функция $h(x_1, x_2, \dots, x_p)$ принадлежит классу непрерывно дифференцируемых в \mathbf{R}^p функций.

В [2] утверждается, что если случайный вектор $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \Sigma)$ с вектором математического ожидания $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ и матрицей ковариаций Σ , то выполняется p -мерный вариант тождества (1).

В [5] было установлено, что для случая $p = 2$ верно и обратное утверждение, и, стало быть, тождество (1) является характеризационным для двумерного нормального распределения.

В докладе, представленном данным сообщением, будет показано, что это обратное утверждение справедливо и в общем случае произвольного натурального p .

Утверждение. Если на всех функциях $h(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbf{C}_1$ тождество Лью выполняется для случайного вектора $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ с ковариационной матрицей Σ , то этот вектор имеет p -мерное нормальное распределение $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \Sigma)$ с параметрами $\mathbf{M}\mathbf{a}$ и матрицей ковариаций Σ .

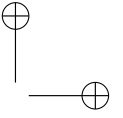
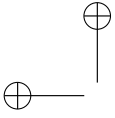
Доказательство основано на тех же соображениях, что и доказательства характеризационных свойств тождеств в [3] и [4], однако в качестве экспоненциальной производящей функции моментов в данном случае нужно взять

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = \mathbf{M} h(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p) = \mathbf{M} e^{\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_p \eta_p}.$$

Введем функцию $\psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = \ln \mathbf{M} e^{\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_p \eta_p}$.

Имеем для каждого $i = 1, 2, \dots, p$:

$$\frac{\partial \psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)}{\partial \lambda_i} = \frac{\mathbf{M} \eta_i e^{\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_p \eta_p}}{\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)}$$



Учитывая, что предполагается выполнение тождества Лью, для числителя имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \eta_i e^{\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_p \eta_p} \\ &= a_i \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) + \sigma_{11} \lambda_1 \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) + \sigma_{12} \lambda_2 \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \\ & \quad + \dots + \sigma_{1p} \lambda_p \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p). \end{aligned}$$

Стало быть, при каждом из $i = 1, 2, \dots, p$:

$$\frac{\partial \psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)}{\partial \lambda_i} = a_i + \sigma_{11} \lambda_1 + \sigma_{12} \lambda_2 + \dots + \sigma_{1p} \lambda_p.$$

Начнем с решения первого обыкновенного дифференциального уравнения с $i = 1$:

$$\begin{aligned} & \psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \\ &= a_1 \lambda_1 + \sigma_{11} \frac{\lambda_1^2}{2} + \sigma_{12} \lambda_1 \lambda_2 + \dots + \sigma_{1p} \lambda_1 \lambda_p + C(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p). \end{aligned}$$

Постоянную интегрирования $C(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p)$, подставив в решение значение $\lambda_1 = 0$, можем записать в виде $\psi(0, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$. Решение второго уравнения

$$\begin{aligned} & \psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \\ &= a_2 \lambda_2 + \sigma_{21} \lambda_1 \lambda_2 + \sigma_{22} \frac{\lambda_2^2}{2} + \dots + \sigma_{2p} \lambda_2 \lambda_p + \psi(\lambda_1, 0, \lambda_3, \dots, \lambda_p) \end{aligned}$$

после подстановки значения $\lambda_1 = 0$ с учетом решения первого даст

$$\begin{aligned} & \psi(0, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \\ &= a_2 \lambda_2 + \sigma_{22} \frac{\lambda_2^2}{2} + \dots + \sigma_{2p} \lambda_2 \lambda_p + \psi(0, 0, \lambda_3, \dots, \lambda_p) \end{aligned}$$

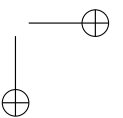
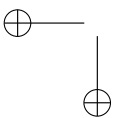
Продолжая действовать таким же образом, на последнем шаге получим

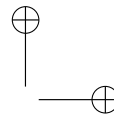
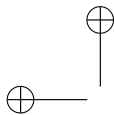
$$\begin{aligned} & \psi(0, 0, \dots, 0, \lambda_p) \\ &= a_p \lambda_p + \sigma_{pp} \frac{\lambda_p^2}{2} + \psi(0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Из определения функции ψ следует, что $\psi(0, 0, \dots, 0) = \ln 1 = 0$, и, собирая полученные соотношения «по цепочке», получим (в векторной записи):

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \Sigma \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_p \end{pmatrix},$$

поскольку $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, p$. Потенцируя, получаем в качестве φ производящую функцию моментов многомерного нормального распределения, указанного в формулировке.





СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liu J. S.* Siegel's formula via Stein's identities. — *Statist. Probab. Lett.*, 1994, v. 21, is. 3, p. 247–251.
2. *Wei Z.*, *Zhang X.*, *Li T.* On Stein identity, Chernoff inequality, and orthogonal polynomials. — *Comm. Statist. Theory Meth.*, 2010, v. 39, p. 2573–2593.
3. *Висков О.В.*, *Прохоров Ю.В.*, *Хохлов В.И.* Характеризационное тождество для биномиального распределения. — *Обзорение прикл. и промышл. матем.*, 2013, т. 20, в. 2, с. 136–137.
4. *Висков О.В.*, *Прохоров Ю.В.*, *Хохлов В.И.* Характеризационное тождество для распределения Паскаля. — *Обзорение прикл. и промышл. матем.*, 2013, т. 20, в. 4, с. 532–533.
5. *Висков О.В.*, *Хохлов В.И.* Характеризационное свойство тождества Лью для двумерного многомерного распределения. — *Обзорение прикл. и промышл. матем.*, 2014, т. 21, в. 1, с. 44–45.

