ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2014

С. А. Загребина, А. С. Конкина (Челябинск, ЮУрГУ). **Об одной новой стохастической модели.**

Рассмотрим стохастическое эволюционное уравнение

$$(\lambda - \Delta)du = \alpha\Delta u dt - \beta\Delta^2 u dt + NdW \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}_+. \tag{2}$$

Задача (1), (2) моделирует эволюцию свободной поверхности жидкости, фильтрующуюся в пласте ограниченной мощности со случайным внешним воздействием. Действительные параметры α , β и λ характеризуют среду, причем α , $\beta > 0$.

Задача (1), (2) редуцируется к абстрактному линейному стохастическому уравнению соболевского типа

$$Ldu = Mu\,dt + N\,dW. \tag{3}$$

Для этого обозначим $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^2(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$ и $\mathfrak{F} = L_2(\Omega)$. Операторы L и M зададим формулами $L = \lambda - \Delta$ и $M = \alpha\Delta - \beta\Delta^2$, причем

$$\operatorname{dom} M = \mathfrak{U} \cap \left\{u \in W_2^4(\Omega) : \Delta u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\right\}.$$

Тогда $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (линейный непрерывный оператор) при всех $\lambda \in \mathbf{R}$, а $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (линейный замкнутый плотно определенный оператор) при всех $\alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, причем оператор M сильно $(L,0)$-секториален [1]. Кроме того, $W = W(t)$ есть $\mathfrak{F}$-значный K-винеровский процесс, т.е $W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)e_k$, $\{\lambda_k\}$ — спектр самосопряженного ядерного оператора $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, $\beta_k(t)$ — стандартные (одномерные) винеровские процессы, называемые так же броуновскими движениями. Пусть для оператора N выполнено условие [2]

$$QN = N. \tag{4}$$

Теорема. *Пусть* $\lambda \in \mathbf{R}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$. *Тогда существует сильное решение задачи* (1), (2) *с условием Коши*

$$u(0) = \xi, \tag{5}$$

которое к тому же имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\nu_k t} \langle \xi, \varphi_k \rangle\, \varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\lambda - \mu_k} \int_0^t e^{\nu_k (t-s)} d\beta_k(s)\, \varphi_k.$$

Здесь $\nu_k = (\alpha\mu_k - \beta\mu_k^2)/(\alpha - \mu_k)$ — точки L-спектра оператора M , $\{\lambda_k\}$ — собственные значения специальными образом построенного ядерного оператора K, $\{\mu_k\}$ — собственные значения оператора Лапласа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht etc.: VSP, 2003.
2. *Kovács M.*, *Larsson S.* Introduction to stochastic partial differential equations. — In: New Directions in the Mathematical and Computer Sciences./ Ed. by G. O. S. Ekhaquere et al. Lagos: Internat. Centre Math. Comput. Sci, 2008, p. 159–232. (Ser. Publications of the ICMCS, v. 4.)