О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 22 **М А Т Е М А Т И К И** **В ы п у с к 1**
2015

А. В. К о л о д з е й (Москва, ЗАО ИнформИнвестГрупп). **Контрольные множества ориентированных графов.**

Пусть $G=(V,E)$ — ориентированный граф с непустым множеством вершин V и непустым множеством ребер E. Путем будем называть любую последовательность смежных вершин графа. Под длиной пути, как обычно, будем понимать число ребер графа в этом пути. Длина пути на единицу меньше числа вершин в нем. Длину пустого пути (не содержащего ни одной вершины) будем полагать равной -1. Назовем множество $M\subset V$ контрольным множеством (Checkpoint Set) графа G с длиной подхода l, если в графе G в любом пути длины больше или равной l, есть хотя бы одна вершина из M. Ясно, что хотя бы одно контрольное множество всегда существует — множество всех вершин графа. Обозначим через $CS(G,l)$ минимум мощностей всех контрольных множеств графа G с длиной подхода l.

Утверждение 1. *Для любого графа $G=(V,E)$ существует предел*

$$1\leqslant \lim_{l\to\infty} CS(G,l)\leqslant |V|. \tag{1}$$

Назовем значение $CS(G)$ предела (1) *объемом минимального покрытия графа G контрольными точками*, соответствующее множество — *минимальным контрольным множеством графа*, а минимальное $l=LCS(G)$, при котором $CS(G,l)=CS(G)$ — *длиной подхода к минимальному контрольному множеству графа.* Контрольное множество допускает следующую наглядную интерпретацию. Надо расставить посты на дороге так, чтобы любой достаточно длинный путь лежал мимо хотя бы одного из них. В [1] проблема контрольных точек (The Checkpoint Problem) решалась в несколько другой постановке. Для данного неориентированного графа, множества пар начальных и конечных точек и множества путей, соединяющих начальные и конечные точки, исследовались множества, которые разрезали любой путь из начальных точек в конечные. При поиске минимальных контрольных множеств для конкретных классов графом оказывается полезным следующее утверждение.

Утверждение 2. *Для любого графа $G=(V,E)$ с минимальным контрольным множеством M величина $LCS(G)-1$ совпадает с максимальной длиной пути, содержащего вершины только из множества $V\setminus M$.*

Обозначим через $B(k,n)$ граф де Брейна (De Bruijn graph), ориентированный граф, вершинами которого являются все k^n последовательностей длины n в алфавите из k знаков. Две вершины $u=(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1},u_n)$ $v=(v_1,v_2,\ldots,v_{n-1},v_n)$ соединены ориентированным ребром (u,v) тогда и только тогда, когда $v_i=u_{i+1}, i=1,\ldots,n-1$. Т. е., вторая последовательность может быть получена из первой сдвигом влево на один символ и приписыванием произвольного символа из заданного алфавита мощности k. Случайные блуждания на графах де Брейна рассматривались в [2].

Утверждение 3. *Для характеристик CS и LCS графов справедливы следующие утверждения.*

1. *Если в графе $G = (V, E)$ для любой вершины $a \in V$ петля $(a, a) \in E$, то $CS(G) = |V|$ и $LCS(G) = 0$.*

2. *Если ориентированный граф G — простой цикл длины K, то $CS(G) = 1$ и $LCS(G) = K - 1$.*

3. *Для любых натуральных параметров k и n справедливы оценки*

$$CS(B(k,2)) = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{и} \quad LCS(B(k,2)) = k - 1. \tag{2}$$

$$CS(B(2,2n)) \leqslant \frac{2^n(2^n+1)}{2} \quad \text{и} \quad LCS(B(2,2n)) \leqslant 2^n - 1. \tag{3}$$

Возьмем в качестве примера схему Бернулли с вероятностью успеха p, $0 < p < 1$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины, принимающие значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1 - p$. Будем рассматривать зависимые случайные вектора $(\xi_i, \xi_{i+1}), i = 1, 2, \ldots$ и соответствующее случайное блуждание на графе де Брейна $B(2,2)$. Легко проверить, что множество $M = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ — минимальное контрольное множество для этого графа, для любого $i = 1, 2, \ldots$ вероятность $\mathbf{P}\{(\xi_i, \xi_{i+1}) \in M\} < 1$, но с вероятностью 1 среди пар $(\xi_i, \xi_{i+1}), (\xi_{i+1}, \xi_{i+2})$ найдется хотя бы одна из M.

Минимальные контрольные множества могут быть использованы при планировании статистических экспериментов, когда поступающие данные обрабатываются скользящим окном. Например, можно сделать некоторые предварительные вычисления не для всех возможных вариантов значений поступающих данных, а только для минимального контрольного множества. После этого можно ждать, когда скользящее окно требующих обработки данные в него попадет. Полученные оценки гарантируют, что с вероятностью 1 это произойдет не более чем за заранее определенное время.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mohammad Taghi Hajiaghayi, Rohit Khandekar, Guy Kortsarz, Julian Mestre.* The Checkpoint Problem. — Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques, Proceedings of the 13th International Workshop, APPROX 2010, and 14th International Workshop, RANDOM 2010, Barcelona, Spain, September 1-3, 2010.
2. *Мори Т.* Случайные блуждания на графах де Брейна. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 1, с. 194–197.