ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2015

Ф. Л. Хасан (Челябинск, ЮУрГУ). **Инвариантные пространства решений уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в квазибанаховых пространствах.**

Вопрос существования инвариантных подпространств решений тесно связан с существованием экспоненциальных дихотомий решений. Для уравнений соболевского типа в банаховых пространствах такие вопросы рассмотрены впервые в работе [1]. Первая монография [2], охватившая существование инвариантных подпространств и дихотомии решений уравнений соболевского типа, вышла в свет в 2012 году.

Ближайшим обобщением банаховых пространств служат, вообще говоря, не нормируемые, а метризуемые квазибанаховы пространства [3, гл. 1]. А именно квазибанаховы пространства — это пространства в которых норма $\|\cdot\|_{\mathfrak{U}}$ заменена на квазинорму ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$, т.е. в них аксиома треугольника нормы имеет следующий вид: ${}_{\mathfrak{U}}\|u+v\| \leqslant C({}_{\mathfrak{U}}\|u\| + {}_{\mathfrak{U}}\|v\|)$ ($C>1$ не зависит от u, v). Известным примером таких пространств является пространство последовательностей ℓ_q при $q\in(0,1)$ (при $q\in[1,+\infty)$ пространства ℓ_q — банаховы). Однако, в последнее время появились новые квазибанаховы (и банаховы) пространства ℓ_q^m, $m\in\mathbf{R}, q\in\mathbf{R}_+$ [4].

Пусть монотонная последовательность $\{\lambda_k\}\subset\mathbf{R}_+$, такова, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda_k=+\infty$. Определим формулой $\Lambda u=\{\lambda_k u_k\}$ квазиоператор Лапласа, который является топлинейным изоморфизмом пространств ℓ_q^{m+2} и ℓ_q^m при всех $m\in\mathbf{R}, q\in\mathbf{R}_+$.

Пусть $\lambda\in\mathbf{R}, \alpha\in\mathbf{R}_+\setminus\{0\}$. Рассмотрим в квазисоболевых пространствах уравнение следующего вида

$$(\lambda-\Lambda)\dot{u}=\alpha\Lambda u, \tag{1}$$

которое является аналогом уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной [5]. Вектор-функцию $u\in C^\infty(\mathbf{R};\ell_q^{m+2})$, удовлетворяющую уравнению (1) поточечно, назовем классическим решением этого уравнения. Решение $u=u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию Коши

$$u(0)=u_0 \tag{2}$$

при некотором $u_0\in\ell_q^{m+2}$, назовем решением задачи (1), (2).

Определение. Множество $\mathfrak{P}\subset\ell_q^{m+2}$ называется *фазовым пространством* уравнения (1), если

1) любое решение $u=u(t)$ уравнения (1) лежит в $\mathfrak{P}$ поточечно (т.е. $u(t)\in\mathfrak{P}$ при всех $t\in\mathbb{R}$),

2) при любом $u_0\in\mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (1), (2).

Определение. Множество $\mathfrak{I}\subset\mathfrak{P}$ такое, что при всех $u_0\in\mathfrak{I}$ решение $u=u(t)$ задачи (1)–(2) лежит в $\mathfrak{I}$ поточечно (т.е. $u(t)\in\mathfrak{I}$ назовем *инвариантным пространством* уравнения (1).

Относительный спектр для уравнения (1) содержит точки вида $\{\mu_k=\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}:k\in\mathbf{N}\setminus\{\ell:\lambda=\lambda_k\}\}$. В силу чего справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $\lambda \in \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$. *Тогда решения уравнения* (1) *имеют инвариантные пространства.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свиридюк Г. А.*, *Келлер А. В.* Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева. — Изв. ВУЗов. Математика, 1997, № 5, с. 60–68.
2. *Сагадеева М. А.* Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа. Челябинск: Изд-во Центр ЮУрГУ, 2012, 139 с.
3. *Берг Й.*, *Лефстрем Й.* Инвариантные пространства. Введение. М.: Мир, 1980, 264 с.
4. *Аль-Делфи Д. К.* Квазисоболевы пространства ℓ_p^m . — Вестник СамГТУ. Сер. физ.-матем. науки, 2013, в. 2(13), с. 13–16.
5. *Свиридюк Г. А.*, *Загребина С. А.* Неклассический модели математическое физики. — Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование, 2012, № 40(299), с. 7–18.