ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2015

Л. И. Миронова (Подольск, МОГИ). **Постановка экстремальной температурной задачи в исследовании термонапряженного состояния тонких оболочек при локальном тепловом нагреве.**

Для разработки метода исследования термонапряженного состояния и оценки предельных параметров термоупругого состояния элементов конструкций оболочечного типа в условиях действия локальных тепловых нагрузок сформулируем следующую постановку задачи и выберем метод ее решения.

Пусть на тело, находящееся в равновесии, действуют только тепловые нагрузки (другие силовые факторы отсутствуют), при этом тепловой процесс стационарный (т. е. его протекание не завит от временного параметра). Соответствующее этому действию термонапряженное состояние является упругим. При локальном нагреве источником высокой интенсивности термонапряженное состояние тела изменяется и может достигать переходного процесса из упругого состояния в упругопластическое. Такие условия сопоставимы с условиями в зонах технологического влияния сварных оболочечных элементов. Определить уровень максимальной тепловой нагрузки, действие которой приведет к переходному термонапряженному состоянию конструкции. Покажем, что в методе решения задачи может быть применим математический аппарат теории экстремальных задач.

Тогда необходимо найти верхнюю грань некоторой функции $f_0(x)$ состояния, соответствующую верхнему значению интервала зоны упругости. Задача нахождения температурного силового фактора сводится к нахождению экстремума, и может быть отнесена к классу экстремальных задач. Ее математическая формулировка определяется стандартной записью [1]

$$f_0(x) \to \inf(\sup); \qquad x \in C, \tag{1}$$

где C множество допустимых элементов области X определения функции. Множество C является ограничением задачи, а ее решение называется экстремалью. Ограничения в экстремальных проблемах записываются в виде равенств и неравенств, их характер зачастую бывает функциональным. Для функции

$$\mathfrak{J}(x, y^*, \lambda_0, \ldots, \lambda_m) = \langle y^*, F(x)\rangle + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x),$$

задача (1) записывается в следующем виде

$$f_0(x) \to \inf; \quad F(x) = y_0; \quad f_i(x) \leqslant 0; \qquad i \in I; \quad x \in A.$$

Здесь y^* — линейный функционал на Y; λ_i — множители функции Лагранжа; I и Y — некоторые множества; $\mathbf{R}$ — совокупность множества действительных чисел; где имеет место отображения $F : I \to Y$, $f_i : X \to \mathbf{R}$, $\mathrm{A} \subset X$.

Необходимым условием локального минимума будет правило множителей Лагранжа

$$\mathfrak{I}_x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(x^*) = 0 \tag{2}$$

В механике деформируемого твердого тела этим условиям удовлетворяет критерий минимума функционала упругой энергии оболочки. Данный функционал является квадратичным, к нему применимы условия Лежандра и Якоби, при которых функционал является неотрицательным.

Для того, чтобы элемент x^* (2) доставлял экстремум, необходимо, чтобы нашлись числа $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ не все равные нулю, были такими, чтобы выполнялось следующее соотношение

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (\Lambda_i x^* + a_i) = 0, \tag{3}$$

где Λ — линейный непрерывный оператор $\Lambda : X \to X$, λ — собственное значение оператора, если существует вектор $x \neq 0$, такой, что $\Lambda x = \lambda x$.

Решение x^* экстремальной задачи будет

$$(\Lambda_i x|x) \inf(\sup); \qquad (x|x) = 1.$$

Уравнение (3) дает

$$\lambda_0 \Lambda x^* + \lambda_i x^* = 0.$$

Математическая формулировка экстремальной задачи требует непрерывности функционала на конечномерном отрезке интервала, так чтобы лагранжиан L был трижды непрерывной дифференцируемой функцией своих переменных в некоторой области $U \subset \mathbf{R}^3$, в которую входят конечные точки $(t, x^*(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, где $x^*(t)$ — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, являющаяся экстремалью, где выполняется уравнения Эйлера

$$\Big(-\frac{d}{dt} L_{x'} + L_x\Big)_{x^*(t)} = 0.$$

Используя выше изложенный математический аппарат в определении экстремалей температурных полей при действии локальных нагрузок, можно решать обратные задачи, когда по известному термонапряженному состоянию конструкции, близкому к переходному состоянию от упругого в упругопластическое, можно задаваться такими параметрами теплового процесса, действию которых соответствует только термоупругое состояние конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иоффе А. Д.*, *Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 479 с.