ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2015

В. Г. Михайлов (Москва, МИАН). **Новая предельная теорема для числа появления знаков в мультициклической случайной последовательности по модулю 4.**

Пусть $n_1,\ldots,n_r \geqslant 2$ — взаимно простые натуральные числа. Мультициклическая случайная последовательность $\{Z_t\}_{t\geqslant 0}$ со значениями в $\{0,\ldots,M-1\}$ образуется по правилу

$$Z_t = \sum_{j=1}^{r} X^{(j)}_{t(n_j)} \bmod M, \quad t = 0,1,\ldots,$$

где $(X^{(j)}_0,\ldots,X^{(j)}_{n_j-1})$, $j=1,\ldots,r$, — наборы независимых в совокупности случайных величин, распределенных (в нашем случае равномерно) на множестве неотрицательных вычетов по модулю M, а $t(n_j) = t - [t/n_j]n_j$.

Пусть $M = 4$. Для $a_1,a_2 \in \{0,1\}$ определим величины $\varkappa_{a_2a_1}(r)$ — количество чисел в последовательности $(Z_0,Z_1,\ldots,Z_{n_1\cdots n_r-1})$, имеющих двоичную запись a_2a_1. Пусть $\varkappa_{a_2*}(r) = \varkappa_{a_20}(r)+\varkappa_{a_21}(r)$. Введем величины $\beta(r),\beta_0(r),\beta_1(r)$, которые определяются системой равенств

$$\frac{4\varkappa_{a_2a_1}(r) - n_1\cdots n_r}{\sqrt{n_1\cdots n_r}} = (-1)^{a_1}\beta(r) + 2(-1)^{a_2}\beta_{a_1}(r), \quad a_1,a_2 \in \{0,1\}. \tag{1}$$

В [1] было показано, что при $r = \mathrm{const} \geqslant 2$ и $n_1\cdots n_r \to \infty$ случайная величина $\beta(r)$ и вектор $2^{r/2}(\beta_0(r),\beta_1(r))$ асимптотически независимы, функция распределения величины $\beta(r)$ сходится к функции распределения величины η_r — произведения r независимых копий стандартной нормальной случайной величины η, а функция распределения вектора $2^{r/2}(\beta_0(r),\beta_1(r))$ сходится к функции распределения вектора $(\varrho_r\cos\varphi,\ \varrho_r\sin\varphi)$, где случайная величина ϱ_r является произведением r независимых экземпляров случайной величины ϱ, имеющей распределение Рэлея с плотностью $f(x) = xe^{-x^2/2}$, $x \geqslant 0$, а величина φ распределена равномерно на единичной окружности.

Так как при $r \to \infty$

$$|\eta_r| \sim e^{r\mathbf{E}\ln|\eta| + O\left(\sqrt{r\,\mathbf{D}\ln|\eta|}\right)}, \quad \varrho_r \sim e^{r\mathbf{E}\ln\varrho + O\left(\sqrt{r\,\mathbf{D}\ln\varrho}\right)},$$

а

$$\mathbf{E}\ln|\eta| = -0,635\cdots < -0,288\cdots = \mathbf{E}\ln\varrho - \frac{\ln 2}{2},$$

то при $r \to \infty$ и $n_1\cdots n_r \to \infty$ асимптотическое поведение распределения частот знаков при соответствующих условиях определяется последним членом в разложении (1), а предельным распределением для них является логарифмически нормальное распределение.

Наши исследования показали, что это действительно так, и привели к следующим утверждениям.

Теорема. *Пусть случайные величины* $X_t^{(j)}$, $t = 0, \ldots, n_j - 1$, $j = 1, \ldots, r$, *распределены равномерно на множестве неотрицательных вычетов по модулю* 4, *число* $r \to \infty$ *и* $n_1 \cdots n_r \to \infty$ *так, что*

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\ln^{3/2} n_j}{\sqrt{n_j}} \to 0.$$

Тогда при всех $a_1, a_2 \in \{0, 1\}$

1) *знак и абсолютное значение разности* $4\varkappa_{a_2 a_1}(r) - n_1 \cdots n_r$ (*как и разности* $2\varkappa_{a_2 *}(r) - n_1 \cdots n_r$) *асимптотически независимы*,

2) *функции распределения случайных величин*

$$\frac{1}{\sqrt{r\mathbf{D}\ln\varrho}} \ln\left(\left|\frac{4\varkappa_{a_2 a_1}(r) - n_1 \cdots n_r}{2^{1-r/2}\sqrt{n_1 \cdots n_r} e^{r\mathbf{E}\ln\varrho}}\right|\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{r\mathbf{D}\ln\varrho}} \ln\left(\left|\frac{2\varkappa_{a_2 *}(r) - n_1 \cdots n_r}{2^{1-r/2}\sqrt{n_1 \cdots n_r} e^{r\mathbf{E}\ln\varrho}}\right|\right)$$

сходятся к функции стандартного нормального распределения,

3) *распределение величины* $\operatorname{sign}(4\varkappa_{a_2 a_1}(r) - n_1 \cdots n_r)$ *сходится к распределению величины* $(-1)^{a_2 + \xi}$, *где* ξ *распределена равномерно на* $\{0, 1\}$.

4) *распределение величины* $\operatorname{sign}(2\varkappa_{a_2 *}(r) - n_1 \cdots n_r)$ *сходится к распределению величины* $(-1)^{a_2 + \xi'}$, *где* ξ' *распределена равномерно на* $\{0, 1\}$.

Здесь $\mathbf{D}\ln\varrho = 0,411\ldots$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Меженная Н. М., Михайлов В. Г.* О числе появлений знаков в мультициклической случайной последовательности по модулю 4. — Дискретн. матем., 2014, т. 26, в. 4., с. 51–58.