

К. К. Рыбников (Москва, ООО «Полиэдр»). **Т. А. Ласковая** (Москва, МГТУ им. Н.Э.Баумана). **О. К. Чернобровина** (Мытищи, МГУЛ). **Метод разделяющих плоскостей: возможности применения, оценки эффективности, трудности алгоритмической реализации, перспективы использования.**

Простейшей задачей определения плоскости, разделяющей два множества G и H n -мерного евклидова пространства E_n , является задача определения гиперплоскости

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b,$$

такой, что для любых векторов $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $z \in G$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $y \in H$ выполняются два неравенства:

$$\sum_{i=1}^n a_i z_i \leq b \text{ (неравенство может быть строгим) и } \sum_{i=1}^n a_i y_i > b.$$

Эта задача является одной из базовых в теории распознавания образов (см. например [1]).

Более общий подход, получивший в научной литературе название метода разделяющих плоскостей [2], заключается в погружении изучаемого множества G в выпуклый многогранник $M(A, b)$:

$$G \subseteq M(A, b) = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}, \text{ где } x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

$$A = \{a_{ij}\} \text{ — матрица размера } m \times n, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Этот подход дает перспективу использования аппарата линейного программирования для определения элементов G .

История разработки метода разделяющих плоскостей насчитывает не более шестидесяти лет. Первые предпосылки к этому подходу можно отнести к работам Б. А. Головкина, Ф. Грано, П. Хаммера и С. Рудеану. Далее последовали исследования Г. В. Балакина, В. Г. Никонова, Н. В. Никонова, авторов настоящей статьи и других [2], [3], [4].

В этих исследованиях на основании использования метода разделяющих плоскостей был предложен подход к анализу структуры и особенностей функционирования некоторых узлов электронных схем.

1. Анализ комплекса универсальных узлов, определяемых булевыми функциями. Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n $(0, 1)$ -входных сигналов ($x_i = 0$ или

$x_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$), поступающих на двоичные преобразователи. Таким образом, рассматриваемый комплекс узлов определяется системой булевых уравнений:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, t. \quad (2)$$

В ряде работ (например [2], [4]) описана принципиальная возможность сведения задачи определения всех решений (2) к задаче определения всех $(0, 1)$ -точек некоторого многогранника $M(A, b)$.

Погружение множества всех решений (2) G в многогранник $M(A, b)$ (см. (1)) позволяет находить частные решения системы (2) с помощью бивалентных методов целочисленного программирования, например, В-метода Ю. Ю. Финкельштейна или аддитивного алгоритма Е. Балаша (см., например, [5]).

2. Настройка формальных нейронов для решения задачи распознавания двух векторных массивов. Пусть существуют два векторных массива X и Y :

$$X = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}\}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

и

$$Y = \{y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_n^{(j)}\}, \quad j = 1, 2, \dots, t.$$

Необходимо определить формальный нейрон $W = f(g) = f(\sum a_i z_i)$, где W — выходной сигнал нейрона; $f(g)$ — функция активации; a_i — вес i -го входа; z_i — i -й входной сигнал ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$W = f(g) = \begin{cases} 1, & \text{если } g < d, \\ 0, & \text{если } g \geq d, \end{cases} \quad \text{где } d \text{ — некоторое пороговое значение.}$$

Таким образом, плоскость $g = d$ является разделяющей плоскостью.

Настройка нейрона для распознавания массивов X и Y сводится к определению коэффициентов (весов) $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, и порогового значения d (если оно заранее не задано), то есть к определению точки полиэдра:

$$\begin{cases} X \cdot a < \bar{d}, \\ Y \cdot a \geq \bar{d}, \end{cases} \quad \text{где } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \bar{d} = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Трудоемкость алгоритма решения совместной системы неравенств (3), очевидно, определяется трудоемкостью симплекс-метода, который может быть использован для определения частного решения системы (3) (см. [4]).

В том случае, когда полиэдр (3) — пустое множество, задача настройки может быть решена приближенно. В этом случае приближение определяется чебышевской точкой системы (3) (см. [6], [7]). В работе [6] задача определения чебышевской точки сведена к решению задачи линейного программирования.

3. Синтез узлов электронных схем. В работе [8] показано, что двоичный (булев) узел преобразования можно представить в виде равносильного преобразования комплексом формальных нейронов.

4. Построение специальных узлов преобразования на основе выбора исходных целочисленных многогранников. Если матрица A — абсолютно унимодулярная, то многогранник $M(A, b)$ — целочисленный. Соответственно, если взять массивы X и Y таким образом, чтобы многогранник, соответствующий полиэдру (3), оказался целочисленным (то есть, обеспечив абсолютную унимодулярность матрицы условий), можно решить задачу настройки методами линейного программирования [11].

Условия абсолютной унимодулярности приведены в [9], [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головкин Б. А. Машинное распознавание и линейное программирование. М.: Сов. Радио, 1973.
2. Балакин Г. В., Никонов В. Г. Методы сведения булевых уравнений к системам пороговых соотношений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1994, т. 1, в. 3, с. 389–401.
3. Hammer P. L. Boolean Elements in Combinatorial Optimization. Combinatorial Programming: Methods and Applications. Dordrecht–Boston, 1968.
4. Никонов В. Г., Рыбников К. К. Применение полиэдральных методов в прикладных математических задачах, сводящихся к анализу и решению систем линейных неравенств. — Вестник Московского гос. ун-та леса, Лесной вестник, 2003, № 1(26), с. 81–85.
5. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.
6. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967.
7. Рыбников К. К. Приближенные методы настройки формального нейрона для решения задачи распознавания двух векторных массивов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 2, с. 380–382.
8. Ласковая Т. А., Рыбников К. К., Чернобровина О. К. О реализации универсальных двоичных узлов преобразования в электронных схемах комплексом формальных нейронов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 2, с. 295–297.
9. Линейные неравенства и смежные вопросы. / Под ред. Л. В. Канторовича и В. В. Новожилова. М.: ИЛ, 1959.
10. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация. Минск: БГУ, 1977.
11. Рыбников К. К. Методы анализа псевдобулевых систем линейных неравенств и их приложения к изучению узлов нейросетей. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 3, с. 561–563.