ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2015

Е. А. Солдатова (Челябинск, ЮУрГУ). **Начально-конечная задача для модели Хоффа на графе.**

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ — множество ребер, причем каждое ребро E_j имеет длину $l_j \in \mathbf{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbf{R}_+$. В вершинах $\mathfrak{V}$ графа $\mathbf{G}$ зададим условия «непрерывности» и «баланса потока» соответственно

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i), \quad E_m, E_n \in E^{\omega}(V_i), \end{gathered} \tag{1}$$

$$\sum_{j: E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{k: E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0, \tag{2}$$

где через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине V_i, $t \in \mathbf{R}$.

Теперь на графе $\mathbf{G}$ с условиями (1), (2) рассмотрим линейную стохастическую модель Хоффа

$$\lambda_j du_j + du_{jxx} = \alpha_j u_j dt + N_j dW_j, \tag{3}$$

описывающую динамику выпучивания двутавровых балок, находящихся под постоянной нагрузкой в конструкции со случайным внешним воздействием, где $\alpha, \ \lambda \in \mathbf{R}$.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots) : u_j \in W_2^1(0, l_j)\}$ со скалярным произведением $\langle u, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} v_{jx} + u_j v_j) dx$. Затем построим еще одно гильбертово пространство $\mathbf{L_2}(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots) : g_i \in L_2(0, l_j)\}$, со скалярным произведением $(g, h) = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx$. Отождествим $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ со своим сопряженным, и через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряженное относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространство к $\mathfrak{U}$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ — гильбертово пространство, причем вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно.

Фиксируем $a \in \mathbb{R}_+$ и формулой $\langle Au, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} v_{jx} + a u_j v_j) dx$ определим операторы $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, $L = (\lambda - a)\mathbb{I} + A$ и $M = \alpha(a\mathbb{I} - A)$.

Лемма. (i) *При любых* $\alpha, \ \lambda \in \mathbf{R}$ *операторы* $L, \ M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, *причем спектр* $\sigma(L)$ *оператора* L *вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к* $-\infty$.

(ii) *При любых* $\alpha, \ \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ *оператор* M $(L, 0)$*-ограничен.*

Пусть $\{\nu_k\}$ — собственные значения оператора L, занумерованные по неубыванию с учетом их кратности; а $\{\varphi_k\}$ — соответствующие им ортонормированные в смысле $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$ функции. Построим проекторы и разрешающую группу задачи (1)–(3) соответственно

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если } 0 \notin \sigma(L); \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\nu_k = \lambda - a} (\,\cdot\,, \varphi_k)\varphi_k, \text{ если } 0 \in \sigma(L); \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если } 0 \notin \sigma(L); \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda_k = \lambda - a} (\,\cdot\,, \varphi_k)\varphi_k, \text{ если } 0 \in \sigma(L); \end{cases}$$

$$U^t = \sum_{k=1}^{\infty}{}' e^{\mu_k t}(\,\cdot\,,\varphi_k)\varphi_k,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие членов ряда с номерами k такими, что $\nu_k = \lambda - a$.

Теперь рассмотрим линейное стохастическое уравнение соболевского типа

$$Ldu = Mudt + NdW \tag{4}$$

с начально-конечным условием [2]

$$P_{in}(u(0) - u_0) = P_{fin}(u(\tau) - u_\tau) = 0, \quad \tau \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Здесь P_{in}, $P_{fin} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ — относительно спектральные проекторы. Пусть также выполнено условие

$$QN = N. \tag{6}$$

Вернемся к оператору A, и в качестве оператора K возьмем оператор Грина A^{-1}. Его собственные значения $\lambda_k = (\nu_k + a)^{-1}$, занумерованные по невозрастанию, сходятся к точке нуль. Асимптотическое поведение собственных чисел $\{\nu_k + a\}$ оператора A изучено плохо, поэтому мы нуждаемся в гипотезе

$$\nu_k \sim k^2 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{7}$$

которая заведомо выполняется, если граф $\mathbf{G}$ представляет собой цепочку последовательно соединенных ребер. Считая, что (7) выполнено, заключаем, что K — ядерный оператор.

Наконец, построим K-винеровский процесс

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)\varphi_k. \tag{8}$$

Таким образом, все слагаемые в (4) определены, а, значит, можно воспользоваться абстрактной схемой решения начально-конечной задачи [3] и справедлива

Теорема. *Пусть* α, $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ *и выполняется условие* (6). *Тогда для любых* $\mathfrak{U}$*-значных случайных величин* u_0 *и* u_τ, *независимых от* K*-винеровского процесса* (8) *существует единственное мягкое решение задачи* (1)–(3) *с условием* (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Загребина С. А.*, *Солдатова Е. А.* Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом. — Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика, 2013, т. 6, № 1, с. 20–34.
2. *Загребина С. А.* Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики. — Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер.: Матем. моделирование и программирование. Челябинск, 2013, т. 6, № 2, с. 5–24.
3. *Солдатова Е. А.* Начально-конечная задача для линейной стохастической модели Хоффа. — Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер.: Матем. моделирование и программирование. Челябинск, 2014, т. 7, № 2, с. 124–128.