ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2015

Е. В. Б ы ч к о в (Челябинск, ЮУрГУ). **Решение IMBq уравнения в круговой области.**

В теории мелкой воды предполагается, что длина волны гораздо больше глубины невозмущенной жидкости. Волны в теории мелкой воде моделируется уравнением Буссинеска и его модификациями. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — круг. В цилиндре $\Omega \times \mathbf{R}$ рассмотрим уравнение

$$(1-\beta\Delta)u_{tt} = k\Delta u + \Delta f(u). \tag{1}$$

Если $f(u) = u^3$, то уравнение (1) называется Improved Modified Boussinesq Equation (IMBq уравнение) получено в [1]. Предполагается, что скорость движения жидкости не зависит от глубины, и, что дно достаточно плоское. Для уравнения (1) ставятся граничные условия Дирихле

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R} \tag{2}$$

и начальные условия Коши

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, оператор $N \in C^\infty$, причем ядро оператора L может быть нетривиальным. Оператор-функцию $(\mu L - M)^{-1}$ называется L-резольвентой оператора M [2, 3].

О п р е д е л е н и е 1. Оператор M называется $(L,0)$-*ограниченным*, если его относительный спектр ограничен и ∞ является устранимой особой точкой L-резольвенты оператора M.

Математическая модель (1)–(3) исследуется с помощью редукции к задаче Коши для абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка

$$L\ddot{u} = Mu + N(u), \tag{4}$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1. \tag{5}$$

О п р е д е л е н и е 2. Вектор-функцию $u \in C^2((-\tau,\tau);\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (4) при некотором $\tau \in \mathbf{R}_+$, называют *решением этого уравнения*, а если решение удовлетворяет условию (5), то функция u называется *решением задачи* (4), (5).

О п р е д е л е н и е 3. Множество $\mathfrak{P}$ называется фазовым пространством уравнения (4), если

(i) для любых $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (4), (5);

(ii) любое решение $u = u(t)$ уравнения (4) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория, т. е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при $t \in (-\tau,\tau)$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (I-Q)(Mu + N(u)) = 0\}$.

Пусть выполнено условие:

$$(\mathbb{I} - Q)(M + N'_{u_0}) : \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{F}^0 \text{— топлинейный изоморфизм.} \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть оператор* $M(L,0)$*-ограничен, оператор* $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *и выполнено условие* (6). *Тогда множество* $\mathfrak{M}$ *является фазовым пространством уравнения* (4).

Задачу (1)–(3) можно свести к задаче (4)–(5) и тем самым доказать единственность решения задачи (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов Д. Г., Хабахпашев Г. А.* Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах. — Письма в ЖЭТФ, 2011, т. 93, № 8, с. 469–472.
2. *Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г.* Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева. — Дифф. уравнения, 1990, т. 26, № 2, с. 250–258.
3. *Свиридюк Г. А., Замышляева А. А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка. — Дифф. уравнения, 2006, т. 42, № 2, с. 252–260.