ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2015

О. В. Гаврилова, **Н. А. Манакова** (Челябинск, ЮУрГУ). **Задача жесткого управления для линейной модели реакции-диффузии в трубчатом реакторе.**

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ — множество дуг. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим модель реакции-диффузии в трубчатом реакторе [1], которая представлена системой линейных алгебро-дифференциальных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} x^1_{jt} = \alpha x^1_{jss} + a_{11}x^1_j + a_{12}x^2_j + u^1_j, \quad x^i_j = x^i_j(s,t), \quad i = 1,2, \\ \quad 0 = \beta x^2_{jss} + a_{21}x^1_j + a_{22}x^2_j + u^2_j, \quad s \in (0,l_j), \quad t \in (0,\tau), \end{array}\right. \tag{1}$$

где функции x^1_j, x^2_j удовлетворяют условию непрерывности

$$\begin{array}{c} x^i_j(0,t) = x^i_k(0,t) = x^i_m(l_m,t) = x^i_n(l_n,t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), \quad E_m, E_n \in E^\omega(V_i) \end{array} \tag{2}$$

и условию баланса потоков

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x^i_{js}(0,t) - \sum_{E_j \in E^\omega(V_i)} d_j x^i_{js}(l_j,t) = 0. \tag{3}$$

В данной модели вектор–функция $x = (x^1_j, x^2_j)$ соответствует концентрации реагентов, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$ — коэффициенты диффузии, $u = (u^1_j, u^2_j)$ отвечает за концентрацию катализаторов, выступающих в качестве внешнего воздействия на реакцию в j-м колене реактора. Дополним модель (1)–(3) начальным условием Шоуолтера–Сидорова на каждом j-м ребре

$$\lim_{t\to 0+}(x^1_j(s,t) - x^1_{j0}(s)) = 0. \tag{4}$$

Через $\mathfrak{A}$ обозначим множество $\mathfrak{A} = \{g = (g_1, g_2, \ldots, g_j, \ldots) : g_j \in W^1_2(0,l_j)$ и выполнено (2) $\}$. Отождествим $L_2(\mathbf{G})$ со своим сопряженным, и через $\mathfrak{B}$ обозначим сопряженное относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ пространство к $\mathfrak{A}$. Зададим пространства $\mathfrak{X} = L_2(\mathbf{G}) \times L_2(\mathbf{G})$, $\mathfrak{U} = L_2(\mathbf{G}) \times L_2(\mathbf{G})$. Построим пространство $H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X})\}$. Рассмотрим задачу жесткого управления решениями модели (1)–(4):

$$J(\widehat{x}) = \inf_{x \in H^1(\mathfrak{X})} J(x). \tag{5}$$

Рассмотрим пространство управления $H^1(\mathfrak{U})$ и выделим в нем непустое выпуклое замкнутое множество $\mathfrak{U}_{ad}$. Построим функционал стоимости

$$J(x) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \int_0^{l_j} \left(\frac{\partial^q}{\partial t^q}(x^i_j(s,t) - x^i_{jd}(s,t))\right)^2 ds dt,$$

где $x_d = (x^1_d, x^2_d)$ — желаемое состояние.

Зададим оператор $B : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ формулой:

$$\langle Bg, h\rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_{js} h_{js} ds, \quad g, h \in \mathfrak{A}.$$

Теорема 1. *При любых* $\alpha, \beta, a_{kl} \in \mathbf{R}$, $k, l = 1, 2$, *таких, что* $\beta^{-1} a_{22} \notin \sigma(B)$ *и для любого* $x_0^1 \in L_2(\mathbf{G})$ *существует единственное жесткое управление решениями задачи* (1)–(5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Плюхина И. А.* Фазовое пространство линейной модели реакции и диффузии в трубчатом реакторе. — Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование, 2010, № 16(192), в. 5, с. 68–72.
2. *Келлер А. В.*, *Сагадеева М. А.* Численное решение задач оптимального и жесткого управления для одной нестационарной системы леонтьевского типа. — Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Серия: Математика. Физика, 2013, т. 32, № 19(162), с. 57–66.