ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2015

А. А. Замышляева, О. Н. Цыпленкова (Челябинск, ЮУрГУ). **Оптимальное управление решениями задачи Коши для уравнения соболевского типа высокого порядка.**

Пусть $\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{U}$ — гильбертовы пространства, операторы $A,B_{n-1},\ldots,B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $C\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, функции $u:[0,\tau)\subset\mathbf{R}_+\to\mathfrak{U}$, $y:[0,\tau)\subset\mathbf{R}_+\to\mathfrak{Y}\,(\tau<\infty)$. Обозначим через $\vec{B}$ пучок операторов $B_{n-1},\ldots,B_0$.

О п р е д е л е н и е 1. Пучок операторов $\vec{B}$ называется *полиномиально ограниченным* относительно оператора A (или просто полиномиально A-ограниченным), если

$$\exists a\in\mathbf{R}_+\quad \forall\mu\in\mathbb{C}\quad (|\mu|>a)\Rightarrow (R_\mu^A(\vec{B})\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})).$$

Тогда

$$\int_\gamma \mu^k R_\mu^A(\vec{B})d\mu\equiv\mathbb{O},\quad k=0,1,\ldots,n-2, \tag{A}$$

где контур $\gamma=\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|=r>a\}$.

О п р е д е л е н и е 2. Если пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, ∞ — полюс порядка $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$, то будем называть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)*-ограниченным.*

Лемма [1]. *Пусть пучок операторов полиномиально A-ограничен, выполнено условие (A). Тогда операторы $P\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ и $Q\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y})$ — проекторы.*

Пространства $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ расщепляются в прямую сумму и действия операторов $A,B_{n-1},\ldots,B_0$ также расщепляются [2].

Для полного уравнения соболевского типа высокого порядка [1]

$$Ax^{(n)}=B_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+B_0x+y+Cu \tag{1}$$

рассмотрим задачу Коши

$$x^{(m)}(0)=x_m,\quad m=0,1,\ldots,n-1. \tag{2}$$

О п р е д е л е н и е 3. Вектор-функцию $x\in H^2(\mathfrak{X})=\{x\in L_2(0,\tau;\mathfrak{X}):x^{(n)}\in L_2(0,\tau;\mathfrak{X})\}$ назовем *сильным решением уравнения* (1), если она п. в. на $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x=x(t)$ уравнения (1) назовем *сильным решением задачи* (1), (2), если оно удовлетворяет (2).

Нас будет интересовать задача оптимального управления, которая заключается в отыскании пары $(\widehat{x},\widehat{u})$, где $\widehat{x}$ — сильное решение задачи (1), (2), а $\widehat{u}\in\mathfrak{U}_{ad}$ — управление, для которого выполняется соотношение

$$J(\widehat{x},\widehat{u})=\min\nolimits_{(x,u)\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}}J(x,u). \tag{3}$$

Здесь $J(x,u)$ — некоторый специальным образом построенный функционал качества, $\mathfrak{U}_{ad}$ — некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$.

Теорема. *Пусть пучок операторов* (A,p)*-ограничен, выполнено условие* (A). *Тогда для любых* $x_m \in \mathfrak{X}, m = 0,1,\ldots,n-1,\ \ y \in H^{p+n}(\mathfrak{Y})$ *и*

$$u : (\mathbb{I}-P)x_m = -\sum_{l=0}^{p} K_l^n (B_0^0)^{-1} \frac{d^{l+k}}{dt^{l+k}} (\mathbb{I}-Q)(y+Cu)(0)$$

существует единственное оптимальное управление решениями задачи (2) *для уравнения* (1) *.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Замышляева А. А.* Исследование одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка: Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. Челябинск, 2003.
2. *Sviridyuk G. A.*, *Zamyshlyaeva A. A.* The phase spaces of a class of linear hight-order Sobolev type equations. — Differential equations, 2006, v. 42, № 2, с. 269–278.