ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2015

В. Н. Соболев (Москва, РГТЭУ). **Об одном разложении для характеристической функции.**

При построении асимптотических разложений в центральной предельной теореме часто используются различные разложения характеристической функции. Одно из таких разложений представлено в [1]. В данной работе предложено разложение с более тонкой оценкой остатка.

Утверждение. *Пусть* f *— характеристическая функция распределения* $\mathbf{P}$, *для которого существует абсолютный момент порядка* $(m+1) \geqslant 2$. *Тогда справедливо представление*

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(\sum_{k=0}^{m} \theta_k (it)^k + \theta_{m+1}^{(m)} (it)^{m+1} \right) + R_m,$$

$$|R_m| \leqslant \beta_{m+1} |t|^{m+1} + |b_2| \|\theta_m\| |t|^{m+2} + |b_4| \|\theta_{m-1}\| |t|^{m+3},$$

где $\theta_k = \sum_{j=0}^{[k/2]} a_{k-2j} b_{2j}$ *и* $\|\theta_k\| = \sum_{j=0}^{[k/2]} |a_{k-2j}| |b_{2j}|$ *для* $0 \leqslant k \leqslant m$, $b_{2j} = \frac{(-1)^j}{2^j j!}$, $a_k = \alpha_k / k!$, *а* α_k *— k-й момент распределения* $\mathbf{P}$, β_{m+1} *— $(m+1)$-й абсолютный момент распределения* $\mathbf{P}$ *деленный на* $(m+1)!$.

Доказательство. Пусть $t \in \mathbf{R}$ и $\omega = it$. Хорошо известны разложения для характеристической функции $f(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k \omega^k + \rho_m(t)$, где $|\rho_m(t)| \leqslant \beta_{m+1} |t|^{m+1}$, и экспоненты $e^{\frac{t^2}{2}} = e^{-\omega^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2j} \omega^{2j}$. Их произведение $f(t) e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{2j} \omega^{2j} \sum_{k=0}^{m} a_k \omega^k + \rho(t) e^{\frac{t^2}{2}}$ преобразуем к виду $f(t) e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{m} \theta_k \omega^k + \theta_{m+1}^{(m)} \omega^{m+1} + \sum_{k=m+2}^{\infty} \theta_k^{(m)} \omega^k + \rho_m(t) e^{\frac{t^2}{2}}$, где $\theta_k = \sum_{j=0}^{[k/2]} a_{k-2j} b_{2j}$ для $0 \leqslant k \leqslant m$ и $\theta_k^{(m)} = \sum_{j=0;\, 2j \geqslant k-m}^{[k/2]} a_{k-2j} b_{2j}$, $k > m$, разбив третье слагаемое на две части

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_{m+2+k}^{(m)} \omega^{m+2+k} = \omega^{m+2} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_{m+2+2k}^{(m)} \omega^{2k} + \omega^{m+3} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_{m+3+2k}^{(m)} \omega^{2k}.$$

Рассмотрим отдельно величины $\theta_{m+l}^{(m)} = \sum_{j=0;\, 2j \geqslant l}^{[(m+l)/2]} \alpha_{m+l-2j} b_{2j}$ при четном и нечетном $l \geqslant 1$.

I. Случай нечетного l. Положим $l = 2k+3$. Тогда

$$\theta^{(m)}_{m+l} = \sum_{j=0;\, 2j\geqslant 2k+3}^{[(m+2k+3)/2]} a_{m+2k+3-2j} b_{2j} = \sum_{j=k+2}^{[(m-1)/2]+k+2} a_{m+2k+3-2j} b_{2j} = \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} a_{m-1-2j} b_{2(k+2+j)}$$

Поскольку $|b_{2(k+2+j)}| \leqslant |b_{2(k+2)}||b_{2j}| \leqslant |b_4||b_{2k}||b_{2j}|$, то

$$|\theta^{(m)}_{m+l}| \leqslant |b_{2(k+2)}| \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} |a_{m-1-2j}||b_{2j}| = |b_{2(k+2)}|\|\theta_{m-1}\| \leqslant |b_4||b_{2k}\|\theta_{m-1}\|,$$

$$\left|\omega^{m+3}\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{(m)}_{m+3+2k}\omega^{2k}\right| \leqslant |b_4|\|\theta_{m-1}\||t|^{m+3}\sum_{k=0}^{\infty}|b_{2k}||t|^{2k} = |b_4|\|\theta_{m-1}\||t|^{m+3}e^{t^2/2}.$$

II. Случай четного l. Положим $l = 2(k+1)$. Тогда

$$\theta^{(m)}_{m+l} = \sum_{j=0;\, 2j\geqslant 2k+2}^{[(m+2k+2)/2]} a_{m+2k+2-2j} b_{2j} = \sum_{j=k+1}^{[m/2]+k+1} a_{m-2(j-k-1)} b_{2j} = \sum_{j=0}^{[m/2]} a_{m-2j} b_{2(k+1+j)}.$$

Действуя аналогично случаю нечетного l, получаем

$$|\theta^{(m)}_{m+l}| \leqslant |b_{2(k+1)}| \sum_{j=0}^{[m/2]} |a_{m-1-2j}||b_{2j}| = |b_{2(k+1)}|\|\theta_m\| = |b_2||b_{2k}|\|\theta_m\|,$$

$$\left|\omega^{m+1}\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{(m)}_{m+2+2k}\omega^{2k+1}\right| \leqslant |b_2|\|\theta_m\||t|^{m+2}\sum_{k=0}^{\infty}|b_{2k}||t|^{2k} = |b_2|\|\theta_m\||t|^{m+2}e^{t^2/2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев В.Н.* Об одном разложении характеристической функции. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2014, т. 21, в. 5. (В печати).