ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2015

С. С. Перелевский, Е. А. Пчелинцев (Томск, НИ ТГУ). **Адаптивное улучшенное оценивание гетероскедастичной регрессии в непрерывном времени.**

Регрессионные модели повсеместно встречаются при решении задач анализа и обработки статистических данных. В последнее время большое внимание уделяется исследованию непараметрических регрессионных моделей в непрерывном времени на основе наблюдений, подверженных воздействию неконтролируемых помех, имеющих достаточно сложную структуру [1, 2].

В данной работе предлагается робастная адаптивная процедура оценивания неизвестной функции в непрерывной гетероскедастичной регрессионной модели с гауссовскими шумами. Пусть наблюдаемый процесс описывается уравнением

$$y_i = S(x_j) + \sigma_j \xi_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{1}$$

где $x_j = j/n$, $S(\cdot) \in W_r^k$ — неизвестная функция, которую требуется оценить (соболевский класс W_r^k определен в [1]), $(\xi_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ — последовательность н.о.р.с.в. с нулевым средним и единичной дисперсией, $(\sigma_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ — неизвестные коэффициенты волатильности, которые могут зависеть от x_j, такие что

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j \geqslant \sigma_*, \qquad \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sigma_j \geqslant \sigma^*, \tag{2}$$

σ_*, σ^* — некоторые известные постоянные.

В отличие от взвешенной оценки МНК, предложенной в [1], в работе разрабатывается процедура выбора модели на основе улучшенных оценок МНК [2] вида

$$S^*_\lambda(x) = \sum_{j=1}^{j_0} \lambda(j) \widehat{\theta^*}_{j,n} \phi_j(x) + \sum_{j=j_0+1}^{\omega_\alpha} \lambda(j) \widehat{\theta^*}_{j,n} \phi_j(x), \tag{3}$$

где

$$\lambda(j) = \mathbf{1}_{1\leqslant j\leqslant j_0} + (1-(j/\omega)^k)\,\mathbf{1}_{j_0+1\leqslant j\leqslant \omega},$$
$$j_0 = [\omega/\ln n], \quad \omega = \overline{\omega} + (A_k r n)^{1/(2k+1)}.$$

Здесь $\overline{\omega}$ любая неотрицательная постоянная и

$$A_k = (k+1)(2k+1)/(\pi^{2k}k).$$

$$\widehat{\theta^*}_{j,n} = \left(1 - \frac{(j_0-1)\,\sigma_*^2}{n||\widehat{\theta_n}||(r+\sqrt{j_0\sigma^{*2}/n})}\right)\widehat{\theta}_{j,n}, \quad \widehat{\theta}_{j,n} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^n y_l\,\phi_j(x_l).$$

Теорема. *Пусть в модели* (1) *коэффициенты* $(\sigma_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ *удовлетворяют неравенствам* (2). *Тогда оценка* (3) *превосходит по среднеквадратической точности* *взвешенную оценку МНК, более того разность среднеквадратических рисков* $\Delta_n(S)$ *оценок удовлетворяет следующему неравенству*

$$\Delta_n(S) \leqslant -\frac{(j_0-1)^2\,\sigma_*^4}{n^2(r+\sqrt{j_0\sigma^{*2}/n})^2}.$$

На графике представлено поведение эмпирических среднеквадратических рисков оценки МНК $\widehat{S}_\lambda$ и улучшенной оценки S^*_λ с ростом наблюдений n.

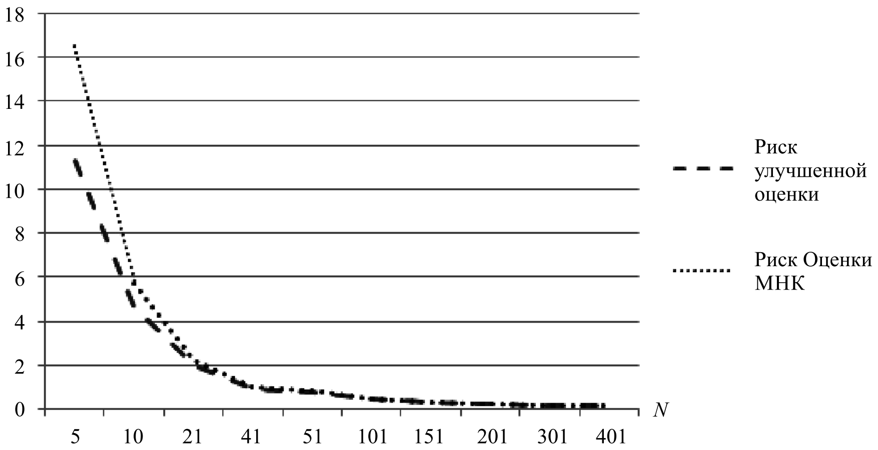

Рис. Эмпирические риски оценки МНК и улучшенной оценки

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Galthouk L. I., Pergamenshchikov S. M.* Adaptive sequential estimation for ergodic diffusion processes in quadratic metric. — J. Nonparametric Statistics, 2011, v. 23, №2, p. 255–285.
2. *Pchelintsev E.* Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression. — Statistical Inference for Stochastic Processes, 2013, v. 16, №1, p. 15–28.