ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2015

А. В. Васин (Пенза, ПФ ФГУП «НТЦ «Атлас»»). **О ненадежности и сложности схем.**

Рассматривается реализация булевых функций схемами (см., например, [1]) из ненадежных функциональных элементов в произвольном полном конечном базисе B. Предполагаем, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию ψ, а в неисправном — функцию $\overline{\psi}$. Считаем, что схема S из ненадежных элементов реализует булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при поступлении на входы схемы двоичного набора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы S появляется значение $f(\mathbf{a})$.

Ненадежностью $P(S)$ схемы S назовем максимальную вероятность ошибки на выходе схемы S при всевозможных входных наборах схемы. Надежность схемы S равна $1 - P(S)$. Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Схема A из ненадежных элементов, реализующая функцию f, называется асимптотически оптимальной (асимптотически наилучшей) по надежности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$.

Число k, будем называть коэффициентом ненадежности базиса, если все функции в этом базисе можно реализовать схемами с ненадежностью, асимптотически не больше $k\varepsilon$ (при $\varepsilon \to 0$), и найдется функция f, которую нельзя реализовать схемой с ненадежностью, асимптотически меньше чем $k\varepsilon$ (при $\varepsilon \to 0$).

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных функциональных элементов рассматривал Дж. фон Нейман [2]. Схема из ненадежных элементов характеризуется двумя важными параметрами: вероятностью ошибки на выходе схемы и сложностью схемы. Основной недостаток метода фон Неймана в том, что с ростом числа итераций сложность схем увеличивается экспоненциально (примерно, в 3^k раз, где k — число итераций). Поэтому именно сложности уделялось главное внимание в дальнейших исследованиях (см. работы С. И. Ортюкова [3], Д. Улига [4], С. В. Яблонского [5].

Из работы Дж. фон Неймана следует, что если базис содержит медиану $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, то его коэффициент ненадежности равен 1. Оказалось, что существуют и другие базисы (не содержащие медиану), коэффициент ненадежности которых также равен 1 (см. работы [6], [7], [8], [9]).

Найдено множество функций G, включающее и существенно расширяющее ранее известное множество функций, при наличии которых в базисе B коэффициент ненадежности базиса B равен 1. Исследована сложность полученных схем.

Опишем указанное множество G функций $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Пусть $\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \ldots, \widehat{e}_k \in \{0,1\}^k$, где $\widehat{e}_i$ — вектор имеющий ровно одну ненулевую компоненту на i-м месте, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Обозначим через E^r множество из k векторов $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_k \in \{0,1\}^k$ такое, что: 1) $\widetilde{e}_i = \widehat{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$; 2) $\widetilde{e}_i = \widehat{e}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij}\widehat{e}_j$, где $\lambda_{ij} \in \{0,1\}$ — произвольные коэффициенты, $i = r+1, r+2, \ldots, k$. Пусть существуют такие двоичные наборы $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in \{0,1\}^k$ такие, что: 1) $\varphi(\widetilde{\alpha}) = 0$, $\varphi(\widetilde{\beta}) = 1$; 2) для любого набора $\widetilde{y}$ такого, что $\widetilde{y} = \widetilde{\alpha} + \widetilde{e}_i$, $\widetilde{e}_i \in E^r$, $\widetilde{e}_i \in E^r$, $i = 1, 2, \ldots, k$, верно $\varphi(\widetilde{y}) = 0$; 3) для любого набора $\widetilde{y}$ такого, что $\widetilde{y} = \widetilde{\beta} + \widetilde{e}_i$, $\widetilde{e}_i \in E^r$, $i = 1, 2, \ldots, k$, верно $\varphi(\widetilde{y}) = 1$; 4) $A \cap B = \varnothing$, где $A = \{\widetilde{\alpha}\} \cup \{\widetilde{y} : \widetilde{y} = \widetilde{\alpha} + \widetilde{e}_i, i = 1, 2, \ldots, k\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\} \cup \{\widetilde{y} : \widetilde{y} = \widetilde{\beta} + \widetilde{e}_i, i = 1, 2, \ldots, k\}$. Пусть G' — множество всех возможных функций φ, G'' — множество функций конгруэнтных функциям G'. Через G обозначим множество функций G'', а так же функций, из которых отождествлением переменных можно получить одну из функций множества G''.

Теорема 1. *Пусть полный базис B содержит функцию $\varphi \in G$. Тогда любую функцию f в базисе B можно реализовать схемой S с ненадежностью* $P(S) \leqslant \varepsilon + 1{,}1(8(3/2)^k + k(k+1))\varepsilon^2$ *при любом* $\varepsilon \in (0, \min(960^{-1}, (28(8(3/2)^k + k(k+1)))^{-1})]$.

Обозначим множество функций, зависящих не более чем от n переменных, отличных от тождественных через $K(n)$, а $K = \lim_{n\to\infty} K(n)$. Любая схема S, реализующая функцию $f \in K$, содержит хотя бы один функциональный элемент, поэтому ее ненадежность удовлетворяет неравенству $P(S) \geqslant \varepsilon$ при любом $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Следовательно, если произвольный полный базис B содержит хотя бы один функциональный элемент, реализующий функцию из множества G, то для почти всех функций (так как $\lim_{n\to\infty} |K(n)|/2^{2^n} = 1$) асимптотически оптимальные по надежности схемы S функционируют с ненадежностью $P(S) \sim \varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом справедлива теорема 2.

Теорема 2. *Если полный базис B содержит функцию $\varphi \in G$, то коэффициент ненадежности базиса B равен* 1.

Сформулируем оценки сложности для полных базисов, содержащих функции множества G.

Теорема 3. *Пусть B — полный базис, $B \cap G \neq \varnothing$. Для любого $b > 0$ существуют константы $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$ и $d > 0$, зависящие только от базиса, такие, что при любом $n \geqslant 3$ любую булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K(n)$ можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой S, для которой $P(S) \leqslant \varepsilon + d\varepsilon^2$ при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $L(S)\ 3(1+b)\rho 2^n/n$ при $n \to \infty$.*

З а м е ч а н и е. При доказательстве теоремы 3 использовались результаты Д. Улига [4], и для рассматриваемых базисов константа $\rho = 1/2$.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 14-01-31360 и № 14-01-00273.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лупанов О. П.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем М.: Изд-во МГУ, 1984.
2. *Нейман Дж.* Автоматы. М.: ИЛ, 1956, с. 68—139.
3. *Ортюков С. И.* Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов. — Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 27–29 января 1987 г.). М.: Изд-во Московского ун-та, 1989, с. 166–168.
4. *Uhlig D.* Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity. — Fundamentals of Computation Theory. Intern. conf. FCT87 (Kazan, June 1987). Proc. Berlin: Springer-Verlag, 1987, p. 462–469. (Lecture Notes in Comput. Sci.; v. 278).
5. *Яблонский С. В.* Асимптотически наилучший метод синтеза надежных схем из ненадежных элементов. — Banach Center, 1982, № 7, p. 11–19.

6. *Алехина М. А.*, *Васин А. В.* О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных. — Ученые записки Казанского государственного ун-та. Серия Физ.-матем. науки, Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 2009, т. 151, кн. 2, с. 25–36.
7. *Аксенов С. И.* О надежности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов. — Изв. ВУЗов. Поволжский регион. Естественные науки., Пенза, 2005, №6(21), с. 42–55.
8. *Васин А. В.* О функциях специального вида. — Труды VIII международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Лесной городок Моск. обл., 6–9 апреля 2009 г.). М.: МАКС Пресс, 2009, с. 43–46.
9. *Алехина М. А.*, *Аксенов С. И.*, *Васин А. В.* О функциях и схемах, применяемых для повышения надежности схем. — Изв. ВУЗов. Поволжский регион. Физико-математические науки., 2008, №3, с. 30–38.