ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2015

А. О. Кондюков, Т. Г. Сукачева (Великий Новгород, НовГУ). **Об одном методе исследования неклассических моделей магнитогидродинамики.**

В работе [1] приведена система

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v - \nabla p - 2\Omega\times v + (\nabla\times b)\times b, \\ \nabla\cdot v = 0, \quad \nabla\cdot b = 0, \\ b_t = \delta\nabla^2 b + \nabla\times(v\times b), \end{cases} \tag{1}$$

которая моделирует поток несжимаемой жидкости Кельвина-Фойгта[2] нулевого порядка в магнитном поле Земли. Здесь вектор-функции $v = (v_1(x,t), v_2(x,t), \ldots, v_n(x,t))$ и $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), \ldots, b_n(x,t)$ характеризуют скорость жидкости и магнитную индукцию соответственно, $p = p(x,t)$ — давление, $æ$ — коэффициент упругости, ν — коэффициент вязкости, Ω — угловая скорость, δ — магнитная вязкость.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для системы (1)

$$\begin{array}{l} v(x,0) = v_0(x), \quad b(x,0) = b_0(x) \quad x\in D, \\ v(x,t) = 0, \quad b(x,t) = 0 \quad (x,t)\in\partial D\times\mathbf{R}_+, \quad l = \overline{1,\ K}. \end{array} \tag{2}$$

Здесь $D\subset\mathbf{R}^n$, $n = 2,3,4,$ — ограниченная область с границей ∂D класса C^∞.

Разрешимость задачи (1), (2) исследована с помощью теории полулинейных уравнений соболевского типа [3] на основе метода фазового пространства[4]. Поэтому в первой части работы излагается абстрактная задача Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для полулинейного автономного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + F(u), \tag{4}$$

где оператор $L\in\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, т.е. линеен и непрерывен; оператор $M : \operatorname{dom} M\to\mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathcal{U}$, т.е. $M\in\mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$ ($\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ — банаховы пространства). Обозначим $\mathcal{U}_M = \{u\in\operatorname{dom} M : \|u\| = \|Mu\|_\mathcal{F} + \|u\|_\mathcal{U}\}$. Оператор $F\in C^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$.

Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален [5; 6]. Известно, что при этом условии решение задачи (3), (4) может быть не единственным [7], поэтому мы будем искать такие решения задачи (3), (4), которые являются *квазистационарными полутраекториями.*

Определение 1. Пусть пространство $\mathcal{U}$ расщепляется в прямую сумму $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0\oplus\mathcal{U}_1$ так, что $\ker L\subset\mathcal{U}_0$. Решение $u = v + w$, где $v(t)\in\mathcal{U}_0$, а $w(t)\in\mathcal{U}_1$ при всех $t\in(0,T)$, уравнения (4) назовем *квазистационарной полутраекторией*, если $L\dot{v}\equiv 0$.

Хорошо известно, что решение задачи (3), (4) существует не для всех $u_0 \in \mathcal{U}_M$. Поэтому введем еще одно определение.

О п р е д е л е н и е 2. Множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_M$ назовем *фазовым пространством* уравнения (4), если для любой точки $u_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное решение задачи (3), (4), причем $u(t) \in \mathcal{B}$.

Во второй части работы задача (1), (2) рассматривается как конкретная интерпретация абстрактной задачи (3), (4). Исследовано фазовое пространство задачи (1), (2) и получена теорема существования и единственности решения, являющегося квазистационарной полутраекторией.

Теорема. *Пусть* $æ^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. *Тогда при любом* u_0 *таком, что* $u_0 \in \mathcal{M}$ *и некотором* $T \in \mathbf{R}_+$ *существует единственное решение* $u = (u_\sigma, 0, u_p, u_b)$ *задачи* (1), (2), *являющееся квазистационарной полутраекторией, причем* $u(t) \in \mathcal{M}$ *при всех* $t \in (0, T)$.

Описание множества $\mathcal{M}$ (фазового пространства рассматриваемой задачи), оператора A и его сужения A_σ на соответствующее подпространство соленоидальных векторов, а также вектора u содержится в [1].

В [8] представлены аналогичные результаты для системы ненулевого порядка, полученные методом фазового пространства. В дальнейшем предполагается распространить указанный метод на случай модели магнитогидродинамики более высокого порядка.

Работа поддержана Министерством Образования и Науки Российской Федерации (государственное задание № 1.857.2014/К) и частично грантом Президента Российской Федерации для молодых кандидатов наук (МК-128.2014.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sukacheva T. G.*, *Kondyukov A. O.* Phase space of a model of magnetohydrodynamics. — Differentsialnye Uravneniya, 2015, v. 51, № 4, p. 495–501.
2. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и Олдройта. — Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1988, т. 179, с. 126–164.
3. *Матвеева О. П.*, *Сукачева Т. Г.* Математические модели вязкоупругих несжимаемых жидкостей ненулевого порядка. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014, 101 с.
4. *Свиридюк Г. А.*, *Сукачева Т. Г.* Фазовые пространства одного класса операторных уравнений. — Дифф. уравнения, 1990, т. 26, № 2, с. 250–258.
5. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов. — Успехи мате. наук, 1994б т. 49, № 4, с. 47–74.
6. *SviridyukïG. A.Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht. Boston. Köln. Tokyo.: VSP, 2003.
7. *Свиридюк Г. А.* Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева. — Изв. РАН. Сер. матем., 1993, т. 57, № 3, с. 192–207.
8. *Кондюков А. О.*, *Сукачева Т. Г.* Об одной модели магнитогидродинамики ненулевого порядка. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2015, т. 22, в. 1, с. 75.