ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2015

А. К. Мелешко (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана)**. Перечисление помеченных геодезических полноблочно-кактусных графов.**

Геодезический граф — это связный граф, у которого любая пара вершин связана единственной кратчайшей цепью (геодезической) [1]. Кактусом называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле [2, с. 93]. Все блоки кактуса — ребра или простые циклы. Полноблочным графом называется граф, у которого все блоки — полные графы. Граф полноблочно-кактусный, если у него все блоки или полные графы, или циклы [3]. Планарный граф — это граф, который можно уложить на плоскости без пересечения ребер. Внешнепланарным графом называется планарный граф, если его можно уложить на плоскости так, что все его вершины принадлежат одной грани. Два графа называются гомеоморфными, если их можно получить из одного графа с помощью последовательности подразбиений ребер. Стемпл и Уотсон [1] доказали, что граф является геодезическим планарным только тогда, когда каждый блок его — ребро, нечетный цикл или граф, гомеоморфный полному графу K_4.

Помеченные полноблочно-кактусные графы перечислены в [4]. В работе [5] перечислены внешнепланарные геодезические графы, которые являются кактусами с нечетными циклами. Геодезические графы применяют при проектировании компьютерных систем и сетей [6].

Теорема. *Пусть GF_n — число помеченных геодезических полноблочно-кактусных графов с n вершинами, тогда при $n \geqslant 3$ верна формула*

$$GF_n = \frac{P_{n-1}(n)}{n} + (n-1)! \sum_{k=1}^{[\frac{n-1}{4}]} \sum_{m=0}^{[\frac{n-4k-1}{2}]} \frac{n^{k-1} P_{n-4k-2m-1}(n)}{2^k k! (n-4k-2m-1)!} \binom{m+k-1}{k-1},$$

где $P_i(x)$ — многочлен Белла одной переменной [7].

Доказательство. Пусть C_n — число помеченных связных графов с n вершинами, а B_n — число помеченных блоков с n вершинами. Введем производящую функцию: $B(z) = \sum\limits_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$.

В работе [8] автором было получено соотношение

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n},$$

где $[z^{-1}]$ — оператор формального вычета [9, с. 25].

Обозначая через $\overline{B}(z)$ экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных геодезических полноблочно-кактусных графов, получим

$$GF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(n\bar{B}'(z)) z^{-n}.$$

Так как у геодезических полноблочно-кактусных графов все блоки или полные графы, или циклы нечетной длины, то

$$\overline{B}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}(2n)!\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\overline{B}'(z) = e^z - 1 + \frac{z^4}{2(1-z^2)}.$$

Следовательно,

$$GF_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\exp(n(e^z-1))\exp\Big(\frac{nz^4}{2(1-z^2)}\Big)z^{-n}.$$

Многочлен Белла одной переменной определяется через числа Стирлинга 2-го рода и имеет следующую производящую функцию:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^k, \quad \exp(x(e^z-1)) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(x)\frac{z^i}{i!}.$$

Таким образом, разлагая экспоненту в степенной ряд, найдем

$$GF_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\sum_{i=0}^{\infty}\frac{P_i(n)}{i!}z^i\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^k z^{4k}}{2^k(1-z^2)^k k!}\right)z^{-n}.$$

Используя известный ряд [10, с. 141]

$$(1-z)^{-k} = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+k-1}{k-1}z^m,$$

имеем

$$GF_n = \frac{P_{n-1}(n)}{n} + (n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n^{k-1}P_{n-4k-2m-1}(n)}{2^k k!(n-4k-2m-1)!}\binom{m+k-1}{k-1}z^{4k-n+2m+i}.$$

Учитывая, что факториал обнуляет слагаемые при $n-4k-2m-1<0$, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Автор благодарит В. А. Воблого за поставленную задачу и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stemple J. G., Watkins M. E.* On planar geodetic graphs. — J. Combin. Theory, 1968, v. 4, p. 101–117.
2. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. М.: Мир, 1977, с. 324.
3. *Randerath B., Volkmann L.* A characterization of well covered block-cactus graphs. — Australasian J. Comb., 1994, v. 9, p. 307–314.
4. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных полноблочно-кактусных графов. — Дискретный анализ и исследование операций, 2014, т. 21, № 2, с. 24–32.
5. *Воблый В. А.* Перечисление помеченных геодезических планарных графов. — Математические заметки, 2015, т. 97, № 3, с. 336–341.
6. *Фрассер С. К. Е.* Разработка математического и алгоритмического обеспечения обработки информации на основе структурного анализа геодезических графов. — Дисс. на соискание уч. ст. к.т.н, М.-Одесса: Одесский политехнический ин-т, 1966.
7. *Carlitz L.* Single variable Bell polynomials. — Collect. Math., 1962, v. 14, p. 13–25.
8. *Воблый В. А.* Об одной формуле для числа помеченных связных графов. — Дискретный анализ и исследование операций, 2012, т. 19, № 4, с. 48–59.
9. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990, 504 с.
10. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982, 256 с.