ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2015

В. М. Корчевский (Санкт-Петербург, ГУАП). **Об усиленном законе больших чисел для попарно отрицательно зависимых случайных величин.**

Классическая теорема Марцинкевича–Зигмунда утверждает, что если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, то соотношение $\mathbf{M}|X_1|^p < \infty$, при некотором $0 < p < 2$, имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{S_n - nb}{n^{1/p}} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{1}$$

Здесь $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geqslant 1$, $b = 0$ если $0 < p < 1$ и $b = \mathbf{M}X_1$ если $1 \leqslant p < 2$.

В данном сообщении мы показываем, что утверждение этой теоремы остается справедливым, если условие независимости случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ заменить условием их попарной отрицательной зависимости.

Напомним, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ называются попарно отрицательно зависимыми, если для любых $i, j \in \mathbf{N}$, $i \neq j$ и для любых $x, y \in \mathbf{R}$ выполнено неравенство $\mathbf{P}\{X_i > x, X_j > y\} \leqslant \mathbf{P}\{X_i > x\}\mathbf{P}\{X_j > y\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность попарно отрицательно зависимых одинаково распределенных случайных величин. Если* $\mathbf{M}|X_1|^p < \infty$ *при некотором* $1 < p < 2$, *то*

$$\frac{S_n - \mathbf{M}S_n}{n^{1/p}} \to 0 \qquad \text{п.н.}$$

Теорема 1 может быть доказана методами, разработанными в [1].

Матула [2] показал, что если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно отрицательно зависимых одинаково распределенных случайных величин, то из условия $\mathbf{M}|X_1| < \infty$ следует, что $S_n/n \to \mathbf{M}X_1$ п. н. Сойером [3] было показано, что в случае $0 < p < 1$ из условия $\mathbf{M}|X_1|^p < \infty$ вытекает $S_n/n^{1/p} \to 0$ п. н. без предположения о независимости. Факур и Азарнуш [4] доказали, что если $0 < p < 2$, то из соотношения (1) (с $b = 0$ при $p < 1$ и $b = \mathbf{M}X_1$ при $p \geqslant 1$) следует, что $\mathbf{M}|X_1|^p < \infty$ в предположении попарной отрицательной зависимости.

Если мы объединим теорему 1 и упомянутые выше результаты Матулы, Сойера и Факура и Азарнуша, то получим следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность попарно отрицательно зависимых одинаково распределенных случайных величин. Если* $0 < p < 2$, *то соотношение* $\mathbf{M}|X_1|^p < \infty$ *имеет место тогда и только тогда, когда выполнено соотношение* (1).

Теорема 2 обобщает теорему 1 из работы [5], доказанную при дополнительном предположении, что $\sup_{n\geqslant 1} n^{-1/p} \sum_{i=1}^n \mathbf{M}|X_1|I_{(|X_1|\leqslant i^{1/p})} < \infty$ в случае $1 < p < 2$.

Работа выполнена в рамках государственного заказа Минобрнауки России Санкт-Петербургскому государственному университету аэрокосмического приборостроения, проектная часть.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Korchevsky V.* Marcinkiewicz-Zygmund strong law of large numbers for pairwise i.i.d. random variables. 2014, arXiv:1404.7454v1 [math.PR].
2. *Matula P.* A note on the almost sure convergence of sums negatively dependent random variables. — Statist. Probab. Lett., 1992, v. 15, p. 209–213.
3. *Sawyer S.* Maximal inequalities of weak type. — Ann. Math., 1966, v. 84, p. 157–174.
4. *Fakoor V.*, *Azarnoosh H. A.* A note on the strong law of large numbers. — JIRSS, 2005, v. 4, № 2, p. 107–111.
5. *Wu Q.*, *Jiang Y.* The strong law of large numbers for pairwise NQD random variables. — J. Syst. Sci. Complex., 2011, v. 24, p. 347-357.