ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2015

Е. Н. Жидков (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Численное уточнение приближенных решений краевой задачи на полупрямой для систем уравнений.**

В работе [1] рассматриваются теоретические аспекты метода приближенного решения систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка. В работе, представленной настоящим докладом, рассмотрен численный метод решения этой задачи.

Решается следующая краевая задача:

$$y'' - A(x)y = 0, \quad y(1) = y_0, \quad y(\infty) = 0. \tag{1}$$

Здесь $A(x)$ — непрерывная на интервале $[1, +\infty)$ ограниченная симметричная положительно определенная матрица порядка n.

При $x \to \infty$ разность $D = A(x) - E - C/x$ имеет асимптотику $\|D\| = O\left(x^{-2}\right)$. Матрицы C и D симметричны.

Для практического решения задачу (1) заменим на

$$z'' - A(x)z = 0, \quad z(1) = y_0, \quad z'(R) + B(R)z(R) = 0.$$

Матрица $B(x) = E + C/(2x)$.

1. Улучшение численного решения. Следуя методу, изложенному в [1], введем $n+1$ число $R_1 < R_2 < \cdots < R_{n+1}$. Для упрощения вычислений будем считать, что $R_{i+1} - R_i = R = \mathrm{const}$.

Введем на отрезке $[1, R_1]$ равномерную сетку $\{x_i\}$, где $x_i = 1 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $h = (R_1 - 1)/m$. Выберем $R = kh$. Тогда на отрезке $[1, R_{n+1}]$ получаем равномерную сетку $\{x_i\}$, где $x_i = 1 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, m + nk$.

На каждом из отрезков $[1, R_j]$ рассмотрим задачи

$$z^{j''} - A(x)z^j = 0, \quad x \in [1, R_j], \quad z^j(1) = y_0, \quad z^{j'}(R_j) + B(R_j)z^j(R_j) = 0.$$

Им соответствуют задачи

$$\begin{aligned} &z^j_{i+1} - (2E + A_i h^2)z^j_i + z^j_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_j - 1, \\ &m_j = 1 + \frac{1 + R_j}{j}, \quad z^j_0 = y_0, \quad z^j_{m_j - 1} = \left(E + hB_{mj} + \frac{1}{2}h^2 A_{mj}\right) z^j_{m_j}. \end{aligned}$$

В качестве улучшенного решения возьмем линейную комбинацию полученных решений $z = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j z^j$, где $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1$. Так как нет рекомендаций по выбору параметров α_j, возьмем среднее арифметическое решений: $\alpha_j = 1/(n+1)$.

2. Численный пример. В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

$$y'' - \frac{1}{(x+1)^2}\begin{pmatrix} x^2 + 5x + 8 & -x - 3 \\ -x - 3 & x^2 + 5x + 8 \end{pmatrix} y = 0, \quad y(1) = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \quad y(\infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2015 г.

Точным решением этой задачи является вектор

$$y = \frac{e^{1-x}}{4(x+1)^2}\begin{pmatrix} 5-x \\ -x-7 \end{pmatrix}.$$

В качестве границ отрезка возьмем $R_1 = 8$, $R_2 = 9$, $R_3 = 10$. В качестве оценки невязки $\delta_j = \left[\int_1^{R_j} ||y(x) - z^j(x)||^2\,dx\right]^{1/2}$ брался дискретный аналог интеграла $\widetilde{\delta}_j = (h\sum_{k=0}^{n} ||y_k - z_k^j||^2)^{1/2}$.

Были получены следующие результаты: $\delta_1 = 0,0026706$; $\delta_2 = 0,002251$; $\delta_3 = 0,0176588$.

В качестве улучшенного решения возьмем линейную комбинацию полученных решений с коэффициентами $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,3$, $\alpha_3 = 0,4$. Погрешность δ линейной комбинации $z = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j z^j$ равна 0,0066.

Наилучшее приближение получается при $\alpha = 0,8312$, $\beta = -0,42676$, $\gamma = 0,575527$. При этом $\delta = 2,66 \cdot 10^{-6}$.

Таким образом, метод позволяет существенно улучшить результаты численных расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жидков Е. Н.* Упрощение построения приближенного решения краевой задачи.— Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 4, с. 648–649.
2. *Самарский А. А.*, *Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.