ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2015

О. В. Алифанов (Москва, МИСиС). **О физической интерпретации пространственно-периодических решений нелинейного уравнения Шредингера в гидродинамическом подходе Маделунга.**

К уравнению Шредингера с кубической нелинейностью приводят многие физические явления, например, распространение электромагнитных волн в изотропной диэлектрической среде с нелинейным показателем преломления [1]. В случае одной пространственной координаты q оно имеет вид:

$$-(\hbar^2/2m)\partial^2\psi/\partial q^2 + V\psi + \alpha|\psi|^2\psi = i\hbar\partial\psi/\partial t. \tag{1}$$

Здесь $\psi(q,t)$ — функция состояния системы, V — потенциал поля, в котором движется частица с массой m, α — константа взаимодействия (рассматриваем случай $\alpha > 0$).

Будем искать решение уравнения (1) с помощью представления Маделунга [2]:

$$\psi(q,t) = R(q,t)\exp[iS(q,t)/\hbar], \tag{2}$$

где R и S — вещественные функции (S не содержит постоянной Планка $\hbar$). Вместо одного комплексного уравнения (1) получим систему из двух вещественных уравнений:

$$\partial S/\partial t + (1/2m)(\partial S/\partial q)^2 + V + Q + \alpha R^2 = 0, \tag{3}$$

$$\partial(R^2)/\partial t + (1/m)\{\partial[R^2(\partial S/\partial q)]/\partial q\} = 0, \tag{4}$$

где

$$Q = -(\hbar^2/2m)(\partial^2 R/\partial q^2)/R \tag{5}$$

так называемый квантовый потенциал Бома [3]. Уравнение (3) представляет собой нелинейный аналог уравнения Гамильтона–Якоби, а уравнение (4) в теории Бома–деБройля имеет смысл уравнения непрерывности для функции плотности распределения частиц $|\psi|^2 = R^2$, скорость v которых определяется функцией действия S в (2):

$$v = (1/m)(\partial S/\partial q).$$

Выражения (3), (4) переходят в соответствующие уравнения для линейного уравнения Шредингера (т. е. без последнего слагаемого в левой стороне (1)) при выполнении условия:

$$Q + \alpha R^2 = 0.$$

Последнее условие с учетом выражения Q из (5) приводит к нелинейному уравнению для R (в фиксированный момент времени):

$$d^2R/dq^2 = (2m\alpha/\hbar^2)R^3, \tag{6}$$

которое представляет частный случай уравнения Эмдена–Фаулера [4]: $y'' = Ax^m y^r$. В уравнении (6) вещественная амплитуда R определена для всех значений $q \in [-\infty, +\infty]$ и может принимать бесконечные значения.

Первый интеграл уравнения (6) имеет вид:

$$(dR/dq)^2 = (a/2)R^4 + C_1, \tag{7}$$

где $a = 2m\alpha/\hbar^2$ и C_1 — произвольная постоянная интегрирования. Уравнение (7) дает два семейства решений: положительные и отрицательные, и имеет структуру аналогичную формуле для энергии частицы в специальной теории относительности, если считать производную от R аналогом энергии частицы, R^2 — аналогом импульса, а постоянные $(a/2)$ и C_1 — аналогами квадрата скорости света и массы частицы, соответственно. Интегрируя (7), получим общее решение уравнения (6) в неявном виде:

$$q = \mp \int \frac{dR}{\sqrt{(a/2)R^4 + C_1}} + C_2, \tag{8}$$

где C_2 — вторая произвольная постоянная. В частном случае $C_1 = 0$ из (8) следуют два семейства решений гиперболического типа:

$$R(q) = \mp(a/2)/q + C_2.$$

Поскольку в (8) фигурирует эллиптический интеграл 1-го рода, решение для амплитуды $R(q)$ можно выразить через эллиптические функции Якоби или связанные с ними функции Вейерштрасса [5], т. е. через периодические функции.

Таким образом приходим к выводу, что амплитуда R является периодической функцией пространственной координаты q. Эта периодичность возникает вследствие нелинейности исходного уравнения (1). Кроме того функция R имеет особенности, что наводит на размышления о связи этого результата с давней идеей деБройля о «волне-пилоте». Более подробное рассмотрение будет представлено в последующем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абловиц М.*, *Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. Пер. с англ. М.: Мир, 479 с.
2. *Madelung E.* Quantentheorie in hydrodynamischer form. — Z. Phys., 1927, v. 40, p. 332–336.
3. *Bohm D.* A suggested interpretation of the quantum theory in the terms of «hidden» variables. — Phys. Rev., 1952, v. 85, p. 166–193.
4. *Полянин А. Д.*, *Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002, 432 с.
5. *Гурвиц А.*, *Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968, 648 с.