О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 22 — М А Т Е М А Т И К И — В ы п у с к 4
2015

В. О. М и р о н к и н (Москва, ТВП). **Совместная вероятность длин отрезков апериодичности двух вершин в графе степени случайного отображения.**

В настоящей работе продолжаются исследования вероятностных свойств и характеристик степени случайного равновероятного отображения конечного множества в себя, начатые в работах [2, 3]. В работе [2] были вычислены вероятности для длины отрезка апериодичности одной случайно выбранной вершины. Однако для детального изучения строения графа степени случайного отображения этого не достаточно. В свою очередь, исследование совместных характеристик позволяет изучить особенности формирования графа степени случайного отображения из исходного графа случайного отображения.

С помощью комбинаторных методов для класса отображений $\{f^k : S \to S, |S| = N\}$, $k \in \mathbf{N}$, построенного на основе класса всех случайных равновероятных отображений $\mathfrak{J} = \{f : S \to S, |S| = N\}$, (см. [1, 4–7]) получено точное выражение для совместной вероятности длин отрезков апериодичности двух различных вершин в графе степени случайного отображения. Введем ряд определений, используемых в работе.

О п р е д е л е н и е. Подходом вершины $x_0 \in S$ в графе отображения f^k, $k \in \mathbf{N}$ называется путь, ведущий из этой вершины до первой циклической вершины.

Граф отображения f^k, $k \in \mathbf{N}$ будем обозначать через $G^{(k)}$.

Через $\alpha_N^{(k)}(x_0)$ — длину подхода вершины $x_0 \in S$ в графе $G^{(k)}$.

О п р е д е л е н и е. Отрезком апериодичности вершины $x_0 \in S$ в графе $G^{(k)}$ называется путь, ведущий из этой вершины до впервые повторно встретившейся вершины.

Через $\tau_N^{(k)}(x_0)$ будем обозначать длину отрезка апериодичности вершины $x_0 \in S$:

$$\tau_N^{(k)}(x_0) = \min_{t \in \mathbf{N}} \big(t | f^{tk}(x_0) \in \{x_0, f^k(x_0), \ldots, f^{(t-1)k}(x_0)\}\big).$$

Для любых $i_0, i_1 \in \mathbf{R} : i_0 > i_1$ *положим* $\prod_{j=i_0}^{i_1}(\ldots) \equiv 1$, $\sum_{j=i_0}^{i_1}(\ldots) \equiv 0$ и $\bigcup_{j=i_0}^{i_1}(\ldots) = \varnothing$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$. *Тогда для любого* $k \in \mathbf{N}$ *и произвольных различных вершин* x_0, $y_0 \in S$ *справедливы равенства*:

1. *Если* $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ *и* $1 \leqslant \gamma \leqslant N$, *то*

$$\mathbf{P}\{\tau_N^{(k)}(x_0) = \gamma, \tau_N^{(k)}(y_0) = \gamma\} = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{l=1,\\ l | \gamma k\\ l \nmid pk,\\ 1 \leqslant p < \gamma}}^{N} (l-1) \prod_{i=2}^{l-1} \Big(1 - \frac{i}{N}\Big)$$

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2015 г.

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{s=1}^{\gamma-1}\sum_{\substack{l=1,\\ l\,|\,sk\\ l\nmid pk,\\ 1\leqslant p<s}}^{N-2M_{\gamma,k}(1,s)} l \sum_{t_1=M_{\gamma,k}(1,s)}^{m_{\gamma,k}(l+M_{\gamma,k}(1,s),s)}\ \sum_{t_2=M_{\gamma,k}(1,s)}^{m_{\gamma,k}(l+t_1,s)}\ \prod_{i=2}^{l+t_1+t_2-1}\Big(1-\frac{i}{N}\Big)$$

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{s=1}^{\gamma-1}\sum_{\substack{l=1,\\ l\,|\,sk\\ l\nmid pk,\\ 1\leqslant p<s}}^{N-M_{\gamma,k}(2,s)-1}\ \sum_{t_1=M_{\gamma,k}(2,s)}^{m_{\gamma,k}(l+1,s)}\ \sum_{t_2=M_{\gamma,k}(1,s)}^{t_1-1}\sum_{j=1}^{t_2}\ \prod_{i=2}^{l+t_1+t_2-j-1}\Big(1-\frac{i}{N}\Big)$$

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{s=1}^{\gamma-1}\sum_{\substack{l=1,\\ l\,|\,sk\\ l\nmid pk,\\ 1\leqslant p<s}}^{N-M_{\gamma,k}(2,s)-1}\ \sum_{t_1=M_{\gamma,k}(2,s)}^{m_{\gamma,k}(l+1,s)}\ \sum_{t_1=M_{\gamma,k}(1,s)}^{t_2-1}\sum_{j=1}^{t_1}\ \prod_{i=2}^{l+t_1+t_2-j-1}\Big(1-\frac{i}{N}\Big)$$

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{s=1}^{\gamma-1}\sum_{\substack{l=1,\\ l\,|\,sk\\ l\nmid pk,\\ 1\leqslant p<s}}^{N-M_{\gamma,k}(2,s)-2}\ \sum_{t_1=M_{\gamma,k}(2,s)}^{m_{\gamma,k}(l+2,s)}\ \sum_{j=1}^{t_1-1}\ \prod_{i=2}^{l+2t_1-j-1}\Big(1-\frac{i}{N}\Big)$$

$$+\frac{\mathbf{I}^N_{\gamma,\gamma}}{N^2}\sum_{s_1=1}^{\gamma}\sum_{s_2=1}^{\gamma}\ \sum_{\substack{l_1=1,\\ l_1\,|\,s_1k\\ l_1\nmid pk,\\ 1\leqslant p<s_1}}^{N-1-\sum_{i=1}^{2}M_{\gamma_i,k}(0,s)}\ \sum_{t_1=M_{\gamma,k}(0,s_1)}^{m_{\gamma,k}(l_1+M_{\gamma,k}(0,s_2)+1,s_1)}$$

$$\times\sum_{\substack{l_2=1,\\ l_2\,|\,sk\\ l_2\nmid pk,\\ 1\leqslant p<s_2}}^{N-l_1-t_1-M_{\gamma,k}(0,s_2)}\ \sum_{t_2=M_{\gamma,k}(0,s_2)}^{m_{\gamma,k}(l_1+t_1+l_2,s_2)}\ \prod_{i=2}^{l_1+l_2+t_1+t_2-1}\Big(1-\frac{i}{N}\Big)$$

2. *Если* $1\leqslant\gamma_1\leqslant N$, $1\leqslant\gamma_2\leqslant N$, *и* $\gamma_1>\gamma_2$, *то*

$$\mathbf{P}\big\{\tau_N^{(k)}(x_0)=\gamma_1,\tau_N^{(k)}(y_0)=\gamma_2\big\}=\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{l=1,\\ l\,|\,\gamma_2k\\ l\nmid pk,\\ 1\leqslant p<\gamma_2}}^{N-M_{\gamma_1,k}(1,\gamma_2)} l\sum_{t_1=M_{\gamma_1,k}(1,\gamma_2)}^{m_{\gamma_1,k}(l,\gamma_2)}\ \prod_{i=2}^{l+t_1-1}\Big(1-\frac{i}{N}\Big)$$

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{s=1}^{\gamma_2-1}\sum_{\substack{l=1,\\ l\,|\,sk\\ l\nmid pk,\\ 1\leqslant p<s}}^{N-M_{\gamma_1,k}(1,s)-M_{\gamma_2,k}(1,s)} l\sum_{t_1=M_{\gamma_1,k}(1,s)}^{m_{\gamma_1,k}(l+M_{\gamma_2,k}(1,s),s)}\ \sum_{t_2=M_{\gamma_2,k}(1,s)}^{m_{\gamma_2,k}(l+t_1,s)}\ \prod_{i=2}^{l+t_1+t_2-1}\Big(1-\frac{i}{N}\Big)$$

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{s=1}^{\gamma_2-1}\sum_{\substack{l=1,\\ l\,|\,sk\\ l\nmid pk,\\ 1\leqslant p<s}}^{N-M_{\gamma_1,k}(2,s)-1}\ \sum_{t_1=M_{\gamma_1,k}(2,s)}^{m_{\gamma_1,k}(l+1,s)}\ \sum_{t_2=M_{\gamma_2,k}(1,s)}^{m_{\gamma_2,k}(l_1+t_1,s)}\sum_{j=1}^{t_2}\ \prod_{i=2}^{l+t_1+t_2-j-1}\Big(1-\frac{i}{N}\Big)$$

$$+\frac{\mathbf{I}^N_{\gamma_1,\gamma_2}}{N^2}\sum_{s_1=1}^{\gamma_1}\sum_{s_2=1}^{\gamma_2}\ \sum_{\substack{l_1=1,\\ l_1\,|\,s_1k\\ l_1\nmid pk,\\ 1\leqslant p<s_1}}^{N-1-\sum_{i=1}^{2}M_{\gamma_i,k}(0,s)}\ \sum_{t_1=M_{\gamma_1,k}(0,s_1)}^{m_{\gamma_1,k}(l_1+M_{\gamma_2,k}(0,s_2)+1,s_1)}$$

$$\times\sum_{\substack{l_2=1,\\ l_2\,|\,s_2k\\ l_2\nmid pk,\\ 1\leqslant p<s_2}}^{N-l_1-t_1-M_{\gamma_2,k}(0,s_2)}\ \sum_{t_2=M_{\gamma_2,k}(0,s_2)}^{m_{\gamma_2,k}(l_1+t_1+l_2,s_2)}\ \prod_{i=2}^{l_1+l_2+t_1+t_2-1}\Big(1-\frac{i}{N}\Big)$$

(*при* $\gamma_1 < \gamma_2$, *то же равенство с точностью до замены* γ_1 *на* γ_2) .

3. *Если* $\gamma_1 \notin \overline{1,N}$ *или* $\gamma_2 \notin \overline{1,N}$, *то*

$$\mathbf{P}\bigl\{\tau_N^{(k)}(x_0)=\gamma_1,\ \tau_N^{(k)}(y_0)=\gamma_2\bigr\}=0.$$

Обозначим через $\mathbf{I}_{\alpha,\beta}^N$ индикатор события $\{\alpha+\beta \leqslant N\}$ и через $\mathbf{I}_{\alpha}^N$ индикатор события $\{\alpha \leqslant N\}$, тогда справедливо следствие.

Следствие. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$. *Тогда для произвольных различных вершин справедливы равенства*:

1. *Если* $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ *и* $1\leqslant\gamma\leqslant N$, $1\leqslant\gamma_2\leqslant N$, *то*

$$\mathbf{P}\bigl\{\tau_N^{(1)}(x_0)=\gamma,\tau_N^{(1)}(y_0)=\gamma\bigr\}=\frac{\gamma-1}{N^2}\prod_{i=2}^{\gamma-1}\Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr)+\frac{1}{N^2}\sum_{s=\max(2\gamma-N,1)}^{\gamma-1}S\prod_{i=2}^{2\gamma-s-1}\Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr)$$

$$+\frac{\mathbf{I}_{\gamma}^{N-2}}{N^2}\sum_{s=1}^{\gamma-1}\sum_{j=1}^{\gamma-s-1}\prod_{i=2}^{2\gamma-s-j-1}\Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr)+\frac{\mathbf{I}_{\gamma,\gamma}^{N}\gamma^2}{N^2}\prod_{i=2}^{2\gamma}\Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr).$$

2. *Если* $1\leqslant\gamma_1\leqslant N$, $1\leqslant\gamma_2\leqslant N$ *и* $\gamma_1>\gamma_2$, *то*

$$\mathbf{P}\bigl\{\tau_N^{(1)}(x_0)=\gamma,\tau_N^{(1)}(y_0)=\gamma_2\bigr\}=\frac{\gamma_2}{N^2}\prod_{i=2}^{\gamma_1-1}\Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr)+\frac{1}{N^2}\sum_{s=\max(\gamma_1+\gamma_2-N,1)}^{\gamma_2-1}S\prod_{i=2}^{\gamma_1+\gamma_2-s-1}\Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr)$$

$$+\frac{\mathbf{I}_{\gamma_1}^{N-1}}{N^2}\sum_{s=1}^{\gamma_2-1}\sum_{j=1}^{\gamma_2-s}\prod_{i=2}^{\gamma_1+\gamma_2-s-j-1}\Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr)+\frac{\mathbf{I}_{\gamma_1,\gamma_2}^{N}\gamma_1\gamma_2}{N^2}\prod_{i=2}^{\gamma_1+\gamma_2-1}\Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr).$$

(*при* $\gamma_1<\gamma_2$, *то же равенство с точностью до замены* γ_1 *на* γ_2).

3. *Если* $\gamma_1 \notin \overline{1,N}$ *или* $\gamma_2 \notin \overline{1,N}$, *то*

$$\mathbf{P}\bigl\{\tau_N^{(1)}(x_0)=\gamma_1,\ \tau_N^{(1)}(y_0)=\gamma_2\bigr\}=0$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984.
2. *Миронкин В. О.* Исследование свойств и характеристик степени случайного отображения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2014, т. 21, в. 1, с. 70–73.
3. *Миронкин В. О.* Вероятностных характеристики слоев в графе случайного отображения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2015, т. 22, в. 1, с. 80–82.
4. *Сачков В. Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978.
5. *Степанов В. Е.* О распределении числа вершин в слоях случайного дерева. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, в. 1, с. 64–77.
6. *Flajolet P.*, *Odlyzko A.* Random Mapping Statistics. — Lecture Notes in Computer Science 434, EUROCRYPT89, 1989, p. 329–354.
7. *Harris B.* Probability distributions related to random mapping. — Ann. Math. Statist., 1960, v. 31, №4, p. 1045–1062.