ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2015

Т. А. Белкина, Н. Б. Конюхова, С. В. Курочкин (Москва, ЦЭМИ РАН, ВЦ РАН). **О вероятности разорения в модели с диффузионным возмущением процесса риска и инвестированием капитала в рисковый актив.**

Рассматривается модель коллективного риска, в которой динамика капитала X_t страховой компании описывается уравнением

$$X_t = u + ct + \int_0^t [\alpha(\mu - r) + r] X_s ds + \sigma \int_0^t \alpha X_s dw_s + \sigma_1 \int_0^t dw_s^1 - Y_t, \quad t \geqslant 0. \qquad (1)$$

Здесь u — начальный капитал, $0 < c$ — скорость поступления страховых премий, Y_t — процесс агрегированных страховых выплат, предполагаемый составным пуассоновским с интенсивностью $\lambda > 0$ и функцией $F(z)$ распределения скачков, определяющих размеры выплат, $F(0) = 0$. Число α определяет долю текущего капитала в каждый момент времени, вкладываемого в рисковый актив (акции), цена S_t которого моделируется геометрическим броуновским движением

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dw_t), \quad t \geqslant 0, \qquad (2)$$

где μ — ожидаемая доходность акции, $0 < \sigma$ — ее волатильность, w_t — стандартный винеровский процесс, не зависящий от процесса Y_t; оставшаяся доля капитала инвестируется в безрисковый актив (банковский счет) при процентной ставке $r \geqslant 0$. Предпоследнее слагаемое в (1) (в котором $\sigma_1 > 0$, w_t^1 — стандартный винеровский процесс), добавляющее диффузионное возмущение в систему, можно рассматривать или как дополнительную неопределенность, являющуюся следствием влияния экономической среды, или как составляющую процесса страховых премий, позволяющую (при некоторых естественных предположениях) представить этот процесс как случайный. В случае $\alpha = r = 0$ (т. е. при отсутствии инвестиций) соотношение (1) описывает динамику капитала в классической модели риска с диффузионным возмущением (см., например, [1]):

$$R_t = u + ct - Y_t + \sigma_1 w_t^1, \quad t \geqslant 0. \qquad (3)$$

Предполагается, что процессы w_t^1 и Y_t также независимы, и, кроме того, в модели (1) $E(dw_s dw_s^1) = \rho ds$ для некоторого коэффициента корреляции ρ.

Обозначим $\tau = \inf\{t : X_t < 0\}$ — момент разорения; тогда $\psi(u) = \mathbf{P}(\tau < \infty)$ — вероятность разорения в течение бесконечного промежутка времени, а $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$ — вероятность неразорения (ВНР). Вероятность разорения для модели (1) при $\alpha = 0$ и $r > 0$ (инвестиции только в безрисковый актив) изучалась в [2].

Всюду далее предполагается, что страховые требования имеют экспоненциальное распределение:

$$F(x) = 1 - \exp(-x/m), \quad m > 0, \quad x \geqslant 0. \qquad (4)$$

Тогда, в частности, для модели без инвестиций (3) при выполнении условия положительности «нагрузки безопасности», т. е. при $c > \lambda m$, ВНР имеет вид:

$\varphi(u) = 1 - C_1 e^{\theta_+ u} - C_2 e^{\theta_- u}$, где $\theta_\pm = -\left[\frac{1}{2m} + \frac{c}{\sigma_1^2}\right] \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2m} + \frac{c}{\sigma_1^2}\right)^2 - \frac{2}{\sigma_1^2}\left(\frac{c}{m} - \lambda\right)} < 0$, $C_1 = \theta_-(\theta_- + 2c/\sigma_1^2)m/(\theta_+ - \theta_-)$, $C_2 = 1 - C_1$. Эта функция является точным решением приведенной ниже задачи (5)–(9) в вырожденном случае — при $\alpha = r = 0$.

Далее приводятся результаты исследования ВНР в модели (1) при выполнении (4), когда ВНР оказывается решением следующей сингулярной задачи с ограничениями для интегродифференциального уравнения (ИДУ) второго порядка:

$$\frac{1}{2}(b^2u^2 + 2\rho b\sigma_1 u + \sigma_1^2)\varphi''(u) + (au + c)\varphi'(u) - \lambda\varphi(u) + \lambda(J_m\varphi)(u) = 0, \ 0 < u < \infty, \quad (5)$$

$$\varphi(+0) = 0, \quad (6)$$

$$(\sigma_1^2/2)\varphi''(+0) + c\varphi'(+0) = 0, \quad (7)$$

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1, \qquad u \in \mathbb{R}_+, \quad (8)$$

$$\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = 1, \qquad \lim_{u\to\infty} \varphi'(u) = 0. \quad (9)$$

Здесь введены обозначения:

$$a = \alpha(\mu - r) + r, \quad b = \alpha\sigma, \quad (10)$$

$$(J_m\varphi)(u) = \frac{1}{m}\int_0^u \varphi(u - x)\exp(-x/m)dx,$$

где J_m — вольтерров интегральный оператор, $J_m : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$, $C[0,\infty)$ — пространство непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций.

ИДУ (5) формально может быть получено с использованием понятия инфинитезимального оператора однородного марковского процесса (1). Обычно в подобных задачах делаются попытки проводить доказательство гладкости ВНР для правомерности выводов относительно ее поведения, сделанных на основе изучения семейства решений уравнения и выделения из него единственного решения с использованием дополнительных ограничений и условий (см., например, [2]; для классической модели Крамера–Лундберга с инвестициями, т. е. для модели (1) при $\sigma_1 = 0$, см. [3]). При таком подходе эти дополнительные условия для решения, определяющего ВНР (например, предельное условие на бесконечности вида (9)), также требуют доказательства с изучением вероятностного поведения самого случайного процесса (см, например, [4]).

Здесь применяется другой подход, основанный на принципе достаточности, предложенном в [5] и развитом в [6]. При таком подходе доказывается, что если гладкое (в данном случае — дважды непрерывно дифференцируемое) решение соответствующим образом поставленной задачи для ИДУ существует, то это решение определяет ВНР в исходной задаче; при этом не требуется ни доказательства дифференцируемости, ни отдельного обоснования условий. Используя тот факт, что доказательство утверждения «теоремы достаточности», приведенное в [6], легко переносится на рассматриваемый здесь случай, остается свести задачу исследования ВНР в модели (1) к задаче исследования существования и свойств решения задачи (5)–(9).

Отметим здесь только, что условие (6) является следствием наличия аддитивной диффузионной составляющей в (1): разорение неминуемо в нулевом состоянии. Следствием этого факта и самого ИДУ является условие (7).

Упрощающим обстоятельством для моделей с экспоненциальными распределениями является тот факт, что исходные задачи для ИДУ сводятся к эквивалентным задачам для ОДУ более высоких порядков. Для изучения модели Крамера-Лундберга с инвестициями этот подход был применен нами в [7]; см. также [8], где, кроме того, приведены результаты исследования модели со стохастическими премиями.

Теорема. *Пусть в ИДУ* (5) *все параметры фиксированы, причем* a, b, c, m, λ, σ_1 *— положительные числа,* $|\rho| < 1$, *и выполняется условие «надежности портфеля активов»:* $2a/b^2 > 1$, *где* a, b *определены в* (10). *Тогда*:

1) *решение* $\varphi(u)$ *сингулярной задачи с ограничениями* (5)–(9) *существует и единственно*;

2) *указанное решение определяет ВНР для процесса* (1) *и является неубывающей на* $\mathbb{R}_+$ *функцией*;

3) *при больших* u *решение* $\varphi(u)$ *представимо в виде*

$$\varphi(u) = 1 - K\, u^{1-2a/b^2}\, [1 + o\,(1)], \tag{11}$$

где $0 < K$ *— постоянная* (*значение* K, *вообще говоря*, *не может быть найдено методами локального анализа*).

Заметим, что представление на бесконечности (11) для ВНР имеет также место в других моделях с инвестициями: в классической модели и ее модификации со стохастическими премиями (с экспоненциальными распределениями; см., например, [4], [7], [8]), а также в чисто диффузионной модели [9].

Работа Т. А. Белкиной поддержана РФФИ (код проекта 13-01-00784-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dufresne F.*, *Gerber H. U.* Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. — Insurance: Mathematics and Economics, 1991, v. 10, p. 51–59.
2. *Wang G.* A decomposition of the ruin probability for the risk process perturbed by diffusion. — Insurance: Mathematics and Economics, 2001, v. 28, p. 49–59.
3. *Wang G.*, *Wu R.* Distributions for the risk process with a stochastic return on investments. — Stoch. Proc. and Appl., 2001, v. 9, p. 329–341.
4. *Frolova A.*, *Kabanov Yu.*, *Pergamenshchikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous. — Finance Stochast., 2002, v. 6 (2), p. 227–235.
5. *Paulsen J.*, *Gjessing H. K.* Ruin theory with stochastic return on investments. — Adv. Appl. Probab., 1997, v. 29 (4), p. 965–985.
6. *Belkina T. A.* Risky investment for insurers and sufficiency theorems for the survival probability. — Markov Processes and Related Fields, 2014, v. 20, p. 505–525.
7. *Belkina T.*, *Konyukhova N.*, *Kurochkin S.* Singular problems for integro-differential equations in dynamic insurance models. — Differential and Difference Equations with Applications/Series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2013, v. 47, p. 27–44.
8. *Белкина Т. А.*, *Конюхова Н. Б.*, *Курочкин С. В.* Сингулярные начальные и краевые задачи для интегродифференциальных уравнений в динамических моделях страхования с учетом инвестиций. — Современная математика. Фундаментальные направления, 2014, т. 53, с. 5–29.
9. *Norberg R.* Ruin problems with assets and liabilities of diffusion type. — Stoch. Proc. and Appl., 1999, v. 81, p. 255–269.