

Н. А. Колодий, Т. И. Колодий (Волгоград, ВолГУ, НИИГТП).
Оценки параметров случайного поля концентраций вещества в приземном слое атмосферы.

В настоящее время усилия многих исследователей были направлены на развитие теории турбулентной диффузии [1] в направлении построения ее вероятностных моделей, сопровождающееся развитием и применением теории стохастических дифференциальных уравнений параболического типа. Вопросы применения таких уравнений в теории турбулентной диффузии обсуждались в ряде научных публикаций (см., например, статьи [2], [3]).

Дальнейшее развитие теории турбулентной диффузии имеет важное значение для анализа опасных последствий от воздействия вредных химических веществ. Привлечение аппарата стохастического анализа и статистики случайных полей для построения и исследования вероятностных моделей диффузии химического вещества в атмосфере позволяет учитывать случайный характер процесса рассеивания вещества и решать различные статистические задачи относительно параметров модели и характеристик случайного поля концентраций, имеющие непосредственное практическое значение.

В рамках выполнения данного проекта создана новая вероятностная модель мгновенного точечного источника в терминах стохастических дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа.

Рассмотрим стохастическое параболическое уравнение Стратоновича

$$\frac{\partial \xi(t, x)}{\partial t} + [a(t) + bw(t)] \circ \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} + \sigma(t)\xi(t, x) = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$\xi(0, x) = Q\delta(x), \quad t > 0, x \in R,$$

где $(w(t))_{t \geq 0}$ — стандартный винеровский процесс, δ — дельта-функция Дирака, $Q > 0$, $\mu \geq 0$, $b > 0$, $a(t)$ и $\sigma(t)$ — некоторые непрерывные функции, $\sigma(t) \geq 0$, символ « $\circ$ » обозначает произведение Стратоновича. Отметим, что уравнение (1) эквивалентно стохастическому параболическому уравнению Ито

$$\frac{\partial \xi(t, x)}{\partial t} + [a(t) + bw(t)] \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} + \sigma(t) \xi(t, x) = \frac{1}{2} \theta \frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial x^2},$$

где $\theta = \mu + b^2$.

В соответствии с общими идеями построения моделей турбулентной диффузии можно считать, что уравнение (1) описывает рассеивание примеси вещества, образованной в результате мгновенного точечного выброса мощности Q , в случайном поле скорости ветра $(a(t) + bw(t))_{t \geq 0}$ типа белого шума. Параметр μ является коэффициентом молекулярной диффузии вещества, θ — коэффициентом турбулентной диффузии, коэффициент σ характеризует самопроизвольное изменение концентрации примеси.

Среднее значение концентрации вещества $\varphi(t, x) = E\xi(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + a(t) \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} + \sigma(t) \varphi(t, x) = \frac{1}{2} \theta \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2},$$

$$\varphi(0, x) = Q\delta(x), \quad t > 0, \quad x \in R.$$

Очевидно, что $\varphi(t, x) = \frac{Q}{\sqrt{2\pi t\theta}} \exp \left\{ -\frac{1}{2t\theta} \left(x - \int_0^t a(s) ds \right)^2 - \int_0^t \sigma(s) ds \right\}$.

Отметим, что при фиксированных t и x для малого μ значение концентрации $\xi(t, x)$ «близко» к

$$Q \exp \left\{ -\int_0^t \sigma(s) ds \right\} \delta \left(x - \int_0^t a(s) ds - bw(t) \right).$$

При этом, если параметр b принимает большое значение, то среднее значение концентрации вещества $\varphi(t, x)$ будет мало. Это соответствует той ситуации когда облако выброса распространяется по случайной траектории с малым рассеиванием примеси.

Пусть $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $x_j \in R$, $j = 1, 2, \dots, n$. Введем следующие обозначения: $\tau_1 = t_1$, $\tau_j = t_j - t_{j-1}$, $j = 2, \dots, n$; $\alpha(t, x) = x - \int_0^t a(s) ds$; $\bar{\sigma}(t) = \int_0^t \sigma(s) ds$; $\beta(t, u, \mu) = (2\mu t [\ln(Q(2\pi t\mu)^{-1/2} u^{-1}) - \bar{\sigma}(t)])^{1/2}$; $c_{j,j} = \frac{1}{\tau_j} + \frac{1}{\tau_{j+1}}$, $c_{j,j+1} = c_{j+1,j} = -\frac{1}{\tau_j}$, $j = 1, 2, \dots, n-1$; $c_{n,n} = \frac{1}{\tau_n}$; $c_{i,j} = 0$ при $|i-j| > 1$.

Предположим, что в результате серии наблюдений в моменты времени t_j в точках x_j получены величины концентраций $\xi(t_j, x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Используя представление из [4] для плотности конечномерного распределения случайного поля $\xi(t, x)$ легко осуществить вычисление оценок максимального правдоподобия параметров μ и b :

$$\hat{b} = \arg \max_b p_\xi(\xi(t_1, x_1), \dots, \xi(t_n, x_n), b, \mu); \quad \hat{\mu} = \arg \max_\mu p_\xi(\xi(t_1, x_1), \dots, \xi(t_n, x_n), b, \mu).$$

Можно доказать, что получаемые при этом оценки сильно состоятельны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берлянд М. Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеопиздат, 1985, 272 с.
2. Chow P. L. Generalized solution of some stochastic P.D.E.'s in turbulent diffusion. — Stochastic Process. Phys. and Eng., 1988, p. 63–74.
3. Chow P. L. Stochastic partial differential equations in turbulence related problems. — Prob. Anal. and Related Topics, 1978, v. 1, p. 1–43.
4. Колодий Т. И. Стохастическая модель мгновенного точечного источника. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 4, с. 668–669.