ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2015

В. Г. Алябьева (Пермь, ПГНИУ). **Исследование геометрических конфигураций в XIX веке.**

Впервые определение геометрической конфигурации дал К. Т. Рейе (Karl Theodor Reye, 1837–1919) в 1882 году, хотя исследование конфигураций в проективной геометрии производилось задолго до 1882 года. Рейе в статье «Проблема конфигураций» [1] дал определение плоской симметричной конфигурации n_i и пространственной геометрической конфигурации n_i. Плоская геометрическая конфигурация n_i состоит из n точек и n прямых, расположенных так, что каждая из n точек инцидентна i прямым и каждая из n прямых инцидентна i точкам. Пространственная конфигурация n_i состоит из n точек и n плоскостей таких, что в каждой плоскости лежит i точек и через каждую точку проходит i плоскостей. Если пространственной конфигурации принадлежит еще g прямых, таких, что на каждой прямой лежит k точек и через каждую прямую проходит k плоскостей, то такая конфигурация обозначается символом (n_i, g_k). Точки, прямые, плоскости конфигурации называются ее элементами. В качестве элементов конфигурации могут быть выбраны другие геометрические образы, например, прямые и конические сечения. Тогда отношением, связывающим прямые и конические сечения, может быть касание. Однако в дальнейшем, если это не оговорено особо, под элементами конфигурации мы будем понимать точки, прямые и плоскости.

Проблему конфигураций Рейе видит в нахождении чисел n и i, для которых существуют конфигурации, и в изучении свойств конфигураций. Заслуга Рейе состоит в том, что он впервые предпринял систематическое изучение конфигураций в проективной плоскости и обратил всеобщее внимание на этот важный раздел проективной геометрии. Весьма последовательно решал поставленную Рейе проблему З. Кантор из Праги (Seligman Kantor, 1857- ок. 1940). Непосредственным построением можно убедиться, что параметр n для конфигурации n_3 удовлетворяет неравенству $n \geqslant 7$. Случаи $n = 7, 8, 9, 10$ подвергались наиболее тщательному изучению. Для $n = 7$ конфигурация 7_3 единственная, в вещественной плоскости она не реализуется. Это так называемая конфигурация Фано, или конечная проективная плоскость порядка 2. Схема содержит 7 элементов и 7 блоков, каждый блок содержит 3 элемента, каждый элемент принадлежит 3 блокам, каждые два блока имеют один общий элемент. Конфигурация 8_3 также единственная. Еще Мёбиус в 1828 году показал, что она не реализуется в вещественной плоскости, хотя может быть представлена мнимыми элементами. Он же показал, что конфигурацию можно представить системой двух 4-угольников, одновременно вписанных и описанных друг около друга. В 1940 году П. К. Рашевский [2] показал, что конфигурация 8_3 реализуется в конфигурациях $(13_4, 13_4)$ и $(21_5, 21_5)$, т. е. в конечных проективных плоскостях порядка 3 и 4 (хотя термина «конечные плоскости» автор не использует).

В 1881–1882 гг. З. Кантор исследовал конфигурации 9_3 и 10_3. Он доказал, что существует три неизоморфные конфигурации 9_3 [3] и десять неизоморфных конфигураций 10_3 [4]. Все три конфигурации 9_3 реализуются в вещественной проективной плоскости. Одна из конфигураций 9_3 есть конфигурация Паскаля, изучаемая уже давно. Из десяти конфигураций 10_3 в вещественной плоскости реализуются девять. Одна из конфигураций 10_3 известна как конфигурация Дезарга (с 1646 г.). Теоремы Паппа и Дезарга являются важнейшими классификационными теоремами проективных плоскостей. Начиная с 30-х годов XX столетия, исследовались алгебраические эквиваленты для различных конфигураций 9_3 и 10_3. Из отечественных ученых, обратившихся к этой тематике, отметим Б. И. Аргунова [5] и Л. А. Скорнякова [6].

Простейшие пространственные конфигурации образуют вершины, ребра и грани многогранников. В 1828 году Мёбиус исследовал такое расположение тетраэдров, при котором каждый вписан в другой. К. А. Андреев (1848–1921), обобщая построения Мёбиуса, построил [7] целый класс пространственных конфигураций вида $(2^{n-1}_n, 2^{n-1}_n)$, состоящих из 2^{n-1} точек и 2^{n-1} плоскостей, расположенных в трехмерном пространстве так, что в каждой плоскости лежит n точек и через каждую точку проходит n плоскостей. Доказывается, что каждая поверхность второго порядка может быть вписана и описана около конфигурации любого порядка. Конфигурации Андреева незаслуженно стали называть конфигурациями Кокса.

В XIX веке многочисленные работы были посвящены трем знаменитым геометрическим конфигурациям: конфигурации Гессе, состоящая из 9 точек и 12 прямых перегиба плоской кривой третьего порядка, конфигурации 27 прямых на гладкой кубической поверхности, конфигурации 28 двойных касательных плоской кривой четвертого порядка. В теории кривых и поверхностей высших порядков к 60-м годам XIX века накопилось много разрозненных фактов, требующих для своей систематизации некоторой общей идеи. Такая идея была предложена А. Клебшем в двух статьях (1863, 1864) «О теореме Штейнера и некоторых моментах теории кривых третьего порядка» и «О применении абелевых функций в геометрии». Систематически свою идею Клебш изложил в «Лекциях по геометрии» (1871–1872). Клебш предложил искать общие идеи не в геометрии, а в теории функций Римана, изложенной в статье «Теория абелевых функций» (1857). Значение своих работ для геометрии понимал сам Риман, но именно Клебш сделал эту работу Римана достоянием широких кругов математиков. Клебшем был предложен нетривиальный перевод идей Абеля и Римана на геометрический язык: если для Абеля в уравнении $F(w,z)=0$ функция F задает многочлен, w — иррациональность, для Римана w — алгебраическая функция, заданная на римановой поверхности, то для Клебша это — уравнение алгебраической кривой. Каждый факт об этом уравнении отражает геометрические свойства кривой. В статье «О теореме Штейнера и некоторых моментах теории кривых третьего порядка» Клебш рассматривает только кривые третьего порядка. Он доказывает, что они параметризуются эллиптическими функциями. Тогда, переводя на геометрический язык теорему сложения эллиптических функций, он получает результат: точки p_1, p_2, p_3 кривой третьего порядка лежат на одной прямой тогда, когда сумма $z_1+z_2+z_3$ соответствующих значений аргумента эллиптической функции равна периоду функции. Отсюда в качестве следствий можно получить все ранее известные свойства точек перегиба и другие результаты Штейнера как утверждения о положении точек в параллелограмме периодов. В статье «О применении абелевых функций в геометрии» [8]. Клебш аналогично исследует кривые произвольного порядка с любыми особыми точками. В силу того, что теорема Абеля и Римана решает также обратную задачу нахождения функции с уравнением $F(w,z)=0$ на римановой поверхности, имеющей заданные корни и полюса, то при переводе этих фактов на геометрический язык, получаются теоремы о кривых, соприкасающихся с данной кривой в заданных точках.

В XIX веке связи между тремя знаменитыми конфигурациями были найдены также с помощью проективных средств. Так, К. Ф. Гейзер в 1869 году в статье «О двойных касательных плоской кривой четвертой степени» показал, как связаны 27 прямых кубической поверхности и 28 двойных касательных кривой четвертого порядка. Если из какой-нибудь точки O, лежащей на кубической поверхности F_3, проектировать F_3 на плоскость, параллельную касательной плоскости в этой точке, то контур проекции представляет собой плоскую кривую C_4, для которой 28 касательных получаются пересечением следующих плоскостей, проходящих через точку $O:$ во-первых, касательная плоскость к F_3, во-вторых, 27 плоскостей, проходящих через точку O и каждую из прямых на F_3.

Зимой 1920–21 гг. Давид Гильберт прочел в Гёттингене курс «Наглядная геометрия», один из разделов которого был посвящен конфигурациям. Позднее лекции Гильберта, обработанные его учеником С. Кон-Фоссеном, были изданы отдельной книгой. В 1929 году Ф. Леви в книге «Геометрические конфигурации» [9] подвел итог развитию геометрических конфигураций в XIX в.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Reye K. T.* Das Problem der Configurationen. — Acta Mathematica, 1882, Bd. 1, S. 92–96.
2. *Rachevsky P. K.* Sur une géométrie aves de nouvaux axiomes de configuration. — Математический сборник, 1940, № 8(50), с. 183–204.
3. *Kantor S.* Über die Configurationen (3, 3) mit der Indieces 8, 9 und ihren Zusammenhang mit den Curven dritten Ordnung. — Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlischen Akademie der Wissenschaften Wien, 1881, Bd. 84, S. 915–932.
4. *Kantor S.* Über die Configurationen $(3,3)_{10}$. — Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlischen Akademie der Wissenschaften Wien, 1882, Bd. 84, Abth. II, S. 1291–1314.
5. *Аргунов Б. И.* Конфигурационные постулаты в проективных плоскостях и их алгебраические эквиваленты. — Вестник МГУ, 1948, т. I, с. 47–52.
6. *Скорняков Л. А.* Проективные плоскости. — Успехи матем. наук, 1951, т. 6, в. 6(46), с. 112–154.
7. *Андреев К. А.* К вопросу о конфигурациях. — Сообщения Харьковского математического общества, 1889, т. 2, сер. 2, № 1–3, с. 94–107.
8. *Clebsch A.* Ueber die Anwendung der Abelschen Functionenin der Geometrie. — Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1864, Bd. 63, S. 189–244.
9. *Levi F.* Geometrische Konfigurationen mit einer Einfürung in die Kombinatorische Flachentopologie. Leipzig: Hinzel, 1929.