ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2015

Е. Е. Дьяконова (Москва, МИАН). **Предельная теорема для разложимого ветвящегося процесса в случайной среде.**

Пусть $Z_n^{(j)}$, $j=1,2,$ — число частиц типа j в n-м поколении разложимого ветвящегося процесса $\mathbf{Z}_n=(Z_n^{(1)},Z_n^{(2)})$, $n=1,2,\ldots,$ в случайной среде. Случайная среда задается последовательностью $\{f_n(s_1,s_2),\ n=1,2,\ldots\}$ независимых одинаково распределенных вероятностных производящих функций от двух аргументов. Динамика развития популяции частиц, описываемая процессом $\mathbf{Z}(n)$, $n=1,2,\ldots,$ задается следующим образом. Каждая частица популяции имеет единичную длительность жизни, в конце которой порождает потомство. Частица первого типа из n-го поколения независимо от размножения других частиц из этого поколения и от предыстории процесса дает случайное число $\xi_j(n)$ потомков типа j, $j=1,2,$ согласно производящей функции $f_n^{(n)}(s_1,s_2)=\mathbf{E}\,[s_1^{\xi_1(n)}s_2^{\xi_2(n)}]$, задаваемой средой. Каждая частица второго типа размножается независимо от всех других частиц и дает случайное число потомков лишь второго типа, причем численность потомства задается вероятностной производящей функцией $h(s)$, подчиняющейся условиям $h'(1)=1$, $B=h''(1)/2\in(0,\infty)$. То есть, закон размножения частиц второго типа фиксирован.

Пусть $\mathbf{Z}_1=(1,0)$, $|\mathbf{Z}_n|=Z_n^{(1)}+Z_n^{(2)}$, $\mu=\mathbf{E}\xi_1(1)$, $[x]$ — целая часть числа x, $\mathbf{D}\ln\mu\in(0,\infty)$. Для $0<t_1<\cdots<t_k<t_{k+1}=1$ и $\lambda_i>0$, $i=1,\ldots,k+1$, положим

$$g_{i+1}(x)=\frac{\lambda_{k+1-i}/t_{k+1-i}+x}{B(t_{k+1-i}-t_{k-i})(\lambda_{k+1-i}/t_{k+1-i}+x)+1}.$$

Зададим последовательности a_i, и b_i, $i=0,\ldots,k$, соотношениями

$$a_0=\frac{1}{B(1-t_k)},\quad a_{i+1}=g_{i+1}(a_i),\quad b_1=0,\quad b_{i+1}=g_{i+1}(b_i).$$

В случае, когда частные производные первого и второго порядков в точке $(1,1)$ всех функций $\{f_n(s_1,s_2),\ n=1,2,\ldots,\}$ ограничены снизу и сверху константами $0<c_1<c_2<\infty$, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Если* $\mathbf{E}\ln\mu<0$ *и существует такое* $d\in(0,1)$, *что* $\mathbf{E}\mu^d=1$, *то*

$$\mathbf{P}\left(|\mathbf{Z}_n|>0\right)\sim\mathbf{P}\left(Z_n^{(2)}>0\right),\quad n\to\infty,$$

и, кроме того, для любых $k=1,2,\ldots,$ $0<t_1<\cdots<t_k<t_{k+1}=1$ *и* $\lambda_i>0$, $\theta_i>0$, $i=1,\ldots,k+1$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left(\exp\left\{-\sum_{i=1}^{k+1}\theta_i Z_{[nt_i]}^{(1)}+\lambda_i\frac{Z_{[nt_i]}^{(2)}}{[nt_i]}\right\}\Big||\mathbf{Z}_n|>0\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left(\exp\left\{-\sum_{i=1}^{k+1}\theta_i Z_{[nt_i]}^{(1)}+\lambda_i\frac{Z_{[nt_i]}^{(2)}}{[nt_i]}\right\}\Big|Z_n^{(2)}>0\right)=\varphi\left(a_k\right)-\varphi\left(b_k\right),$$

где

$$\varphi\left(x\right)=\left(\frac{B\left(\lambda_{1}/t_{1}+x\right)}{t_{1}B\left(\lambda_{1}/t_{1}+x\right)+1}\right)^{d}.$$

В частности, для $\lambda>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\Bigg(\exp\left\{-\lambda\frac{Z_{n}^{(2)}}{n}\right\}\Big||\mathbf{Z}_{n}|>0\Bigg)=1-\left(\frac{\lambda B}{\lambda B+1}\right)^{d}.$$

З а м е ч а н и е. Из этой теоремы следует, что вероятность того, что в процессе будут присутствовать частицы первого типа, асимптотически мала по сравнению с вероятностью невырождения процесса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант N 14-01-00318).