О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 22 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 4
2015

О. В. В и с к о в, В. М. М а к с и м о в, В. И. Х о х л о в (Москва, МИ РАН, РГУ, МИ РАН). **Характеризационное свойство тождества Вэй–Жанг-Ли для бета-распределения.**

Недавно изобретенный авторами функционально-операторный подход (см. [1]), позволяющий получать моментные характеризационные тождества («1-го порядка») для любых вероятностных распределений, имеющих производящую функцию $\varphi(t) = \mathbf{M}\, e^{t\,\xi}$ моментов случайной величины ξ (трактуемую в общем случае как двустороннее преобразование Лапласа–Стильтьеса, рассматриваемое в некотором замкнутом интервале $\Delta, \operatorname{mes}\Delta > 0$, значений t, содержащем значение $t{=}0$), для некоторых классических распределений теории вероятностей и математической статистики может приводить к громоздким и неудобным для приложений выражениям типа отношения операторных рядов с бесконечным числом членов, как это случилось, например, для бета-распределения $\mathrm{Beta}\,(m,n)$ с положительными параметрами m и n.

Между тем, для этого распределения имеется недавно обнародованное тождество «2-го порядка» (ср. с формулой (14) в [2]) Вей–Жанг–Ли

$$(\forall f \in \mathbb{F}^{\mathrm{B}}) \quad \mathbf{M}\,\overline{\mathbf{W}}\,[f(\beta_{m,n})] = 0, \tag{1}$$

где $\overline{\mathbf{W}} = \mathcal{X}^2\mathcal{D} + \mathcal{X}\big((m{+}n)\mathcal{I} - \mathcal{D}\big) - m\mathcal{I}$, $\mathbb{F}^{\mathrm{B}} = \{f(x) : \mathbf{M}\,|\overline{\mathbf{W}}\,f(\beta_{m,n})| < \infty\}$, $\beta_{m,n} \sim \mathrm{Beta}\,(m,n)$. Здесь и ниже приняты следующие обозначения: $\mathcal{X}$ есть функциональный оператор умножения на независимую переменную (аргумент) x, $\mathcal{D}$ есть функциональный оператор $\dfrac{d}{dx}$ дифференцирования по независимой переменной x, $\mathcal{I}$ есть тождественный функциональный оператор (т. е. $\mathcal{I}\,[g(x)] = g(x)$ для любой функции $g(x)$).

Утверждение. *Оператор* $\overline{\mathbf{W}} = \mathcal{X}^2\mathcal{D} + \mathcal{X}\big((m{+}n)\mathcal{I} - \mathcal{D}\big) - m\mathcal{I}$ *является для бета-распределения* $\mathrm{Beta}\,(m,n)$ *характеризатором, а моментное тождество* (1) *Вей–Жанг–Ли — характеризационным, т. е. из выполнения этого тождества для некоторой случайной величины на функциях из заданного класса* $\mathbb{F}^{\mathrm{B}}$ *следует, что эта случайная величина имеет бета-распределение* $\mathrm{Beta}\,(m,n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\beta_{m,n}$ обладает плотностью

$$\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\, x^{m-1}(1-x)^{n-1}, \quad 0<x<1,\ m,n>0,$$

для производящей функции моментов этой случайной величины имеем выражение

$$\varphi(t) = \mathbf{M}\, e^{t\,\beta_{m,n}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!}\, \frac{[-m]^\nu}{[-(m+n)]^\nu}, \tag{2}$$

где $[a]^\nu$ обозначает убывающую факториальную степень $a(a-1)(a-2)\cdots(a-\nu+1)$.

Воспользовавшись недавно обнаруженным операторно-функциональным соответствием (доказательство его наличия будет дано в последующих публикациях), уравнению (1) в операторной записи сопоставим дифференциальное уравнение

$$t\,P''(t) - \big(t-(m{+}n)\big)\,P'(t) - m\,P(t) = 0 \tag{3}$$

с начальным условием $P(0)=\varphi(0)=1$ и покажем, что производящая функция $\varphi(t)$, выражаемая суммой в (2), является его единственным решением, а это и докажет утверждение.

Полагая $a=-m, b=-(m+n)$ и подставляя эту $\varphi(t)$ в уравнение (3):

$$t\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu-2}}{(\nu-2)!}\,\frac{[a]^{\nu}}{[b]^{\nu}}-t\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,\frac{[a]^{\nu}}{[b]^{\nu}}-b\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,\frac{[a]^{\nu}}{[b]^{\nu}}+a\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu}}{\nu!}\,\frac{[a]^{\nu}}{[b]^{\nu}}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,\frac{[a]^{\nu}}{[b]^{\nu+1}}\Big(\nu\,(a-\nu)-\nu\,(b-\nu)-b\,(a-\nu)+a\,(b-\nu)\Big)=0,$$

убеждаемся, что $\varphi(t)$ является решением уравнения (3).

Единственность этого решения следует из «телескопического» или, если угодно, «рекуррентного» свойства уравнения (3): принимая во внимание, что

$$t\,P''(t)-\big(t-(m+n)\big)\,P'(t)-m\,P(t)\big|_{t=0}=(m+n)\,P'(0)-m\,P(0)=(m+n)\,P'(0)-m,$$

получаем, что $P'(0)=m/(m+n)$. Продифференцировав (3), убедимся, что

$$\begin{aligned}&t\,P'''(t)+P''(t)-\big((t-(m+n)\big)\,P''(t)-P'(t)-m\,P'(t)\big|_{t=0}\\&=(m+n+1)\,P''(0)-(m+1)\,P'(0)=0,\end{aligned}$$

и, стало быть, $P''(0)=m(m+1)/((m+n)(m+n+1))$ совпадает со вторым моментом $\varphi''(0)$ распределения случайной величины $\beta_{m,n}$. Продолжая действовать таким же образом, приходим к выводу, что все значения производных $P^{(\nu)}(0)$, $\nu=3,4,\ldots,$ совпадают с соответствующими моментами $\varphi^{(\nu)}(0)$, $\nu=3,4,\ldots,$ случайной величины $\beta_{m,n},$ а это, в свою очередь, влечет за собой единственность решения (2) уравнения (3) с выбранным начальным условием.

Утверждение имеет своим применением (в дополнение к приведенной в [3]) вторую компактную характеризацию для равномерного распределения.

Следствие. *Для равномерного распределения с плотностью*

$$p_{\xi_u}(x)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad x\in(0,1),\\ 0 & \text{при}\quad x\notin(0,1),\end{cases}$$

характеризационным служит тождество (*в операторной записи*)

$$\big(\forall f(x)\in\mathbb{F}_{\xi_u}\big)\qquad \mathbf{M}\left(\mathcal{X}^2\,\mathcal{D}+\mathcal{X}\,(2\mathcal{I}-\mathcal{D})-\mathcal{I}\right)\big[f(\xi)\big]=0,$$

или, что то же (*в традиционной записи*),[1)]

$$\big(\forall f(x)\in\mathbb{F}_{\xi_u}\big)\qquad \mathbf{M}\,(1-2\,\xi)f(\xi)=\mathbf{M}\,\xi\,(\xi-1)f'(\xi).$$

Используется то обстоятельство, что плотность бета-распределения при $m=n=1$ совпадает с плотностью равномерного на интервале $(0,1)$ распределения.

Существенная часть данного сообщения была включена в доклад авторов на VIII Международном конгрессе по индустриальной и прикладной математике (г. Пекин, 10–14 августа 2015 г., минисимпозиум MS-Th-E-12-3).

[1)] Ср. с формулой (14) в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Висков О.В.* , *Максимов В.М.* , *Хохлов В.И.* Аннуляторы, пред-аннуляторы и характеризаторы вероятностных мер. — В сб.: Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения–V». Материалы конференции. (Ростов-на-Дону, 26 апреля-1 мая 2015 г.). од ред. А. Н. Карапетянца и др. Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2015, с. 178–180.
2. *Wey Zh.*, *Zhang X.*, *Li T.* On Stein identity, Chernoff inequality, and orthogonal polynomials. — Commun. Statist. Theory Methods, 2012, v. 39, is. 14, p. 2573–2593.
3. *Висков О.В.* , *Максимов В.М.* , *Хохлов В.И.* Характеризационные моментные тождества для равновероятного и равномерного распределений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2015, т. 22, в. 1, с. 64–65.