ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2015

И. Л. Макарова, **Е. И. Улитина** (Сочи,СГУ). **К вопросу определения весовых коэффициентов.**

Необходимость численного определения сравнительной важности различных показателей, характеристик объектов, процессов и явлений возникает при решении задач многокритериального выбора, оптимального управления, построения интегральных, сводных показателей и многих других. Существует множество разных подходов к решению задачи определения весовых коэффициентов со своими особенностями, преимуществами и недостатками. Все они предъявляют к вектору весовых коэффициентов одинаковые требования: $\mathrm{w}_i \geqslant 0 \ \ (i = \overline{1,m})$, $\sum_{i=1}^m w_i = 1$, m — количество исходных показателей. Рассмотрим некоторые особенности определения весовых коэффициентов в методе рандомизированных сводных показателей [1].

В рамках дискретной модели неопределенности задания весовых коэффициентов [2] предполагается, что каждый такой коэффициент измеряется с точностью до конечного шага $h = 1/n$, определяемого натуральным числом $n > 1$. Таким образом, весовые коэффициенты могут принимать только дискретные значения из множества

$$w(n) = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

Множество всех возможных векторов весовых коэффициентов

$$W(m,n) = \left\{w^{(t)} = (w_1^{(t)}, \ldots, w_m^{(t)}) \big| w_i^{(t)} \in w(n), \sum_{i=1}^{m} w_i^{(t)} = 1, t \in T(m,n)\right\},$$

где $T(m,n) = \{1, \ldots, N(m,n)\}$ есть множество возможных значений индекса t, является конечным множеством, содержащим $N(m,n) = C_{n+m-1}^{n}$ элементов.

Компоненты случайного вектора весовых коэффициентов, равномерно распределенного на множестве $W(m,n)$, могут быть определены как соответствующие математические ожидания:

$$\overline{w}_i = Mw_i = \frac{1}{N(m,n)} \sum_{t=1}^{N(m,n)} w_i^{(t)}.$$

Понятно, что значения весовых коэффициентов, определенные таким образом, будут зависеть от n. Например, для $m = 3$ и $0 < w_1 < w_2 < w_3$, результаты расчетов представлены в табл. 1. Как видно из табл. 1 при $n = 6$ получаются наибольшие значения w_1, w_2 и наименьшее значение w_3. По мере увеличения n и уменьшения шага дискретизации h весовые коэффициенты ведут себя не монотонно. Чем необходимо руководствоваться при выборе параметра дискретизации n пока непонятно.

Таблица 1. Расчет весовых коэффициентов

n	h=1/n	Весовые коэффициенты		
		w_1	w_2	w_3
6	0,1667	0,1667	0,3333	0,5000
7	0,1429	0,1429	0,2857	0,5714
8	0,1250	0,1250	0,3125	0,5625
9	0,1111	0,1481	0,2963	0,5556
10	0,1000	0,1250	0,3000	0,5750
11	0,0909	0,1273	0,2909	0,5818
12	0,0833	0,1310	0,2976	0,5714
13	0,0769	0,1250	0,2885	0,5865
14	0,0714	0,1214	0,2929	0,5857
15	0,0667	0,1278	0,2889	0,5833
16	0,0625	0,1205	0,2902	0,5893
17	0,0588	0,1213	0,2868	0,5919

Определим наименьшее возможное число $n = n_{\min}$, при котором $\forall w_i > 0$ и $w_1 < w_2 < \cdots < w_m$. Пусть $w_1 = k_1/n$, $k_1 \geqslant 1$ и $w_m = k_m/n$. Тогда

$$1 + 2 + \cdots + (m-1) + k_m = n, \quad \frac{m(m-1)}{2} + k_m = n, \quad k_m = n - \frac{m(m-1)}{2}.$$

Так как $w_i > w_{i-1}$, то $k_m \geqslant m$. Следовательно, $n - \frac{m(m-1)}{2} \geqslant m$, $n \geqslant \frac{m(m-1)}{2} + m$, $n \geqslant \frac{m(m+1)}{2}$. Значит $n_{\min} = \frac{m(m+1)}{2}$.

Таким образом, если мы хотим, чтобы все весовые коэффициенты были больше нуля и $w_1 < w_2 < \cdots < w_m$, то величина шага должна быть не больше $\frac{1}{n_{\min}} = \frac{2}{m(m+1)}$. Пример расчета $n_{\min}$ для различных наборов показателей показан в табл. 2.

Таблица 2. Определение значений параметра дискретизации

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$n_{\min}$	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120

Теперь при тех же условиях определим максимально возможное значение наименьшего из весовых коэффициентов $w_1 = w_{1\max}$.

$$k_1 + (k_1 + 1) + \cdots + (k_1 + m - 2) + k_m = n;$$
$$\frac{2k_1 + m - 2}{2}(m-1) + k_m = n;$$
$$k_1(m-1) + \frac{(m-1)(m-2)}{2} = n - k_m;$$
$$k_1 = \frac{n - k_m}{m-1} - \frac{m-2}{2}.$$

Так как $k_m \geqslant m$, то $k_1 \leqslant \frac{n-m}{m-1} - \frac{m-2}{2}$ и $k_{1\max} = [\frac{n-m}{m-1} - \frac{m-2}{2}]$,

$$w_{1\max} = \frac{k_{1\max}}{n} = \frac{n-m}{n(m-1)} - \frac{m-2}{2n}.$$

Например, при $m = 6$, $n = 27$ получим $k_1 \leqslant \frac{27-6}{5} - \frac{6-2}{2} = 4,2 - 2 = 2,2$ и $k_{1\max} = 2$, $w_{1\max} = 2/27$.

В заключении отметим, что при $n = n_{\min}$ получается один единственно возможный вектор весовых коэффициентов, компоненты которого $(0 < w_1 < w_2 < \cdots < w_m$, $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1)$ совпадают с весовыми коэффициентами, определенными по известной формуле Фишберна [3].

Работа поддержана грантом РФФИ №14-01-00835.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хованов Н. В.* Анализ и синтез показателей при информационном дефиците. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996, 196 с.
2. *Хованов Н. В.*, *Федотов Ю. В.* Модели учета неопределенности при построении сводных показателей эффективности деятельности сложных производственных систем. — Научные доклады НИИ менеджмента СПбГУ, 2006, № 28(R), 37 с.
3. *Королев О. Л.*, *Куссый М. Ю.*, *Сигал А. В.* Применение энтропии при моделировании процессов принятия решений в экономике. Симферополь: Издательство «ОДЖАКЪ», 2013, 148 с.