О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 22 **М А Т Е М А Т И К И** **В ы п у с к 1**
2015

В. В. Ш а м р а е в а (Ростов-на-Дону, РГСУ)). **Некоторые интерполяционные свойства мартингальные мер.**

Рассмотрим одношаговый (B,S)-рынок, заданный на $(\Omega,\mathbf{F})$, где $\mathbf{F}=(F_0,F_1)$ — одношаговая фильтрация, причем $F_0=\{\Omega,\varnothing\}$, а F_1 порождена разбиением Ω на счетное число атомов A_i, $i=1,2,\ldots$. Рассмотрим $\mathbf{F}$ — адаптированный случайный процесс $Z=(Z_k,F_k)_{k=0}^{1}$, который мы мыслим как дисконтированную стоимость акции, $Z_0=a$, $Z_1|_{A_i}=b_i$. Обозначим через $\mathbf{P}(Z,\mathbf{F})$ множество невырожденных мартингальных мер этого рынка. Будем предполагать, что $\inf_i b_i<a<\sup_i b_i$. Это условие гарантирует безарбитражность исходного неполного финансового рынка.

При моделировании и исследовании финансовых рынков часто используют такое важное интерполяционное свойство меры $\mathbf{P}\in\mathbf{P}(Z,\mathbf{F})$ как ослабленное свойство универсальной хааровской единственности (ОСУХЕ). В [1] доказано, что это свойство равносильно ослабленному условию несовпадения барицентров (ОУНБ). Множество мартингальных мер процесса Z, удовлетворяющих ОУНБ, мы будем обозначать ОУНБ(Z).

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что число b, входящее в последовательность $\{b_1,b_2,\ldots\}$, имеет кратность m (m может быть как конечно, так и бесконечно), если в этой последовательности оно присутствует m раз.

Очевидны следующие два факта: 1) если последовательность $\{b_1,b_2,\ldots\}$ содержит конечное число различных чисел, причем лишь одно из них имеет бесконечную кратность, то ОУНБ$(Z)=\varnothing$; 2) если последовательность $\{b_1,b_2,\ldots\}$ содержит два различных числа, причем оба бесконечной кратности, то ОУНБ$(Z)=\mathbf{P}(Z,\mathbf{F})$.

В [2] доказано, что в случае $b_1<a<b_2<b_3$ при $m_1=m_2=\infty$, $m_3=1$ и в случае $b_1<b_2<a<b_3$ при $m_1=1$, $m_2=m_3=\infty$ справедливо равенство ОУНБ$(Z)=\mathbf{P}(Z,\mathbf{F})$. В то же время из результатов работы [1] вытекает, что в остальных случаях ОУНБ(Z) строго вложено в $\mathbf{P}(Z,\mathbf{F})$.

В данных тезисах представлены условия на мартингальные меры, из которых вытекает принадлежность этих мер множеству ОУНБ(Z). Эти условия сформулированы в случаях, когда последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ содержит ровно три или ровно четыре различных значения.

Предложение 1. *Пусть $P=(p_1,p_2,\ldots)\in\mathbf{P}(Z,\mathbf{F})$, а множество $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ состоит из трех различных чисел $b_1<b_2<b_3$, каждое из которых имеет бесконечную кратность, и при этом $b_1<a<b_2<b_3$. Если $\forall\,k\geqslant 1$ выполняются неравенства $(b_2-b_1)p_{3k-2}>(b_3-b_2)\sum_{j=k}^{\infty}p_{3j}$ и $(b_3-b_2)p_{3k}>(b_2-b_1)\sum_{j=k+1}^{\infty}p_{3j-2}$, то мера P удовлетворяет ОУНБ.*

Предложение 2. *Пусть $P=(p_1,p_2,\ldots)\in\mathbf{P}(Z,\mathbf{F})$, а множество $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ состоит из четырех различных чисел $b_1<b_2<b_3,<b_4$ каждое из которых имеет бесконечную кратность, и при этом $b_1<a<b_2<b_3<b_4$. Если $\forall\,k\geqslant 1$ выполняются неравенства $(b_2-b_1)p_{4k-3}>(b_4-b_2)(\sum_{j=k}^{\infty}p_{4j-1}+\sum_{j=k}^{\infty}p_{4j})$ и $(b_4-b_3)p_{4k}>(b_3-b_1)(\sum_{j=k+1}^{\infty}p_{4j-3}+\sum_{j=k+1}^{\infty}p_{4j-2})$, то мера P удовлетворяет ОУНБ.*

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 13-01-00637а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данекянц А. Г.*, *Павлов И. В.* Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 3, с. 506–508.
2. *Павлов И. В.*, *Цветкова И. В.*, *Шамраева В. В.* Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров. — Вестник РГУПС, 2012, № 3, с. 177–181.