ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2015

Г. А. Закирова, С. И. Кадченко (Челябинск, ЮУрГУ). **Решение обратных спектральных задач, порожденных дискретными полуограниченными снизу операторами.**

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор L, заданный в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Его собственные значения μ определяются при нахождении нетривиального решения уравнения

$$Lu = \mu u, \tag{1}$$

которое удовлетворяет некоторым однородным краевым условиям.

Для нахождения собственных значений оператора L воспользуемся методом Галеркина. Введем последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных пространств $H_n \subseteq H$, которая полна в H. Пусть ортонормированный базис пространства H_n известен и состоит из функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$. При этом функции φ_k должны удовлетворять всем краевым условиям задачи. Следуя методу Галеркина, будем искать приближенное решение спектральной задачи (1) в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(n)\varphi_k. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть L — дискретный полуограниченный снизу оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если система координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом H, то метод Галеркина в применении к задаче отыскания собственных значений спектральной задачи (2), построенный на этой системе функций, сходится.*

Теорема 2. *Пусть L — дискретный полуограниченный снизу оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если система координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом H, то*

$$\widetilde{\mu}_n(n) = (L\varphi_n, \varphi_n) + \delta_n, \tag{3}$$

где $\delta_n = \sum_{k=1}^{n-1}[\widetilde{\mu}_k(n-1) - \widetilde{\mu}_k(n)]$, $\widetilde{\mu}_k(n)$ — n-е приближения по Галеркину к соответствующим собственным значениям μ_k оператора L.

Пусть оператор L в уравнении (2) имеет вид

$$L = T + P,$$

где T — самосопряженный оператор, а P — ограниченный оператор умножения на функцию $p(s)$, $s \in [a,b]$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2[a,b]$. Рассмотрим задачу восстановления потенциала P по собственным значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^{n}$ оператора $T+P$ в пространстве $L_2[a,b]$.

Используя (3), построим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x,s)p(s)ds = f(x), \quad c \leqslant x \leqslant d, \tag{4}$$

где функции $f(x)$ и $K(x,s)$ такие, что

$$f(x_k) = \widetilde{\mu}_k - \int_a^b T(\varphi_k(s))\varphi_k(s)ds - \delta_k, \quad K(x_k,s) = \varphi_k^2(s), \quad c \leqslant x_k \leqslant d, \quad k = \overline{1,n}.$$

Если ядро $K(x,s)$ интегрального уравнения (4) непрерывно и замкнуто в прямоугольнике $\Pi = [a,b] \times [c,d]$ и $p(s) \in W_2^1[a,b]$ и $f(x) \in L_2[c,d]$, то решение уравнения (4) единственное. Исходя из определения функции $f(x)$, ее значения в точках x_k известны приближенно. Обозначим через $\widetilde{f}(x_k)$ приближенные значения функции $f(x_k)$ такие, что $\|f(x_k) - \widetilde{f}(x_k)\| \leqslant \xi, \quad \forall x_k \in [c,d]$. Данная оценка используется при составлении алгоритма численного решения задачи.

Нахождение решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (4) является некорректно поставленной задачей. Ее приближенное решение $\widetilde{p}(s)$ может быть найдено с помощью метода регуляризации Н. А. Тихонова. Численное решение уравнения (4) будет определять приближенные значения $\widetilde{p}(s)$ функции $p(s)$ в узловых точках s_i, $i = \overline{1,I}$, $a = s_1 < s_2 < \cdots < s_I = b$. Чтобы получить хорошую точность при интерполяции функции $\widetilde{p}(s)$, число узловых точек I можно выбрать достаточно большим.

Отрезок $[c,d]$ выбирается так, чтобы точность нахождения собственных чисел $\widetilde{\mu}_n$ найденные по формулам (3), принадлежащих этому отрезку, удовлетворяла заданным требованиям.

Таким образом, используя формулы (3), получено интегральное уравнение Фредгольма первого рода (4), решение которого позволяет находить приближенные значения $\widetilde{p}(s)$ функции $p(s)$ в узловых точках s_i дискретизации отрезка $[a,b]$.

Разработанный метод был апробирован на спектральных задачах для оператора Штурма–Лиувилля. Результаты многочисленных расчетов показали высокую вычислительную эффективность метода.