ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2018

В. П. Котельников (Ростов-на-Дону, ВНИИ Градиент). **Аналитический метод вычисления числовых характеристик произведения двух и более коррелированных случайных величин.**

Постановка задачи. Изучается функция случайных аргументов $u = \prod_{i=1}^{m} x_i$, $m \geqslant 2$. Значения аргументов $x_i\,(i=1,2,\ldots,m)$ положительны и изменяются в интервалах (a_i, b_i). Известны математические ожидания $\mathbf{M}\,x_i$ и ковариационная матрица $[\operatorname{cov}(x_i, x_j)]_{i,j=1}^{m}$.

Необходимо вычислить математическое ожидание $\mathbf{M}\,u$ и дисперсию $\mathbf{D}\,u$.

Решение задачи. Перейдем к аддитивной функции

$$y = \ln u = \sum_{i=1}^{m} y_i, \quad \text{где} \quad y_i = \ln x_i, \tag{1}$$

и используем плотность *двумерного двойного нормального распределения* (см., например, [1]):

$$g(x_i, x_j) = f\big(z_i(x_i), z_j(x_j), r_{ij}\big)\left|\frac{dz_i}{dx_i}\,\frac{dz_j}{dx_j}\right|,$$

выраженную через плотность нормального распределения

$$f\big(z_i, z_j, r_{ij}\big) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r_{ij}^2}}\,\exp\left\{-\,\frac{z_i^2 - 2\,r_{ij} z_i z_j + z_j^2}{2\,(1-r_{ij}^2)}\right\}$$

и функции

$$z_l(x_l) = \gamma_l + \eta_l\,\mathcal{N}^{-1}\Big(\frac{x_l - a_l}{b_l - a_l}, 0, 1\Big), \qquad l = 1, 2, \ldots, m,$$

в которых через $\mathcal{N}^{-1}$ обозначена обратная функция стандартного нормального распределения, а через r_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ — коэффициенты корреляции аргументов z_i и z_j. Параметры формы определяются выражениями

$$\eta_l = \sqrt{\Big[\sin\frac{\pi\,\mathbf{D}\,x_l}{2\,(b_l - \mathbf{M}\,x_l)\,(\mathbf{M}\,x_l - a_l)}\Big]^{-1} - 1}\,, \qquad \eta_l > 0, \tag{2}$$

$$\gamma_l = \sqrt{\eta_l^2 + 1}\,\mathcal{N}^{-1}\Big(\frac{\mathbf{M}\,x_l - a_l}{b_l - a_l}, 0, 1\Big), \qquad -\infty < \gamma_l < \infty. \tag{3}$$

По ковариации $\operatorname{cov}(x_i, x_j)$ вычисляем коэффициент корреляции r_{ij} путем решения неявного уравнения

$$\operatorname{cov}(x_i, x_j) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i(z_i)\,x_j(z_j)\,f(z_i, z_j, r_{ij})\,dz_i\,dz_j - \mathbf{M}\,x_i\,\mathbf{M}\,x_j,$$

где

$$x_l(z_l) = a_l + \frac{b_l - a_l}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{(z_l-\gamma_l)/\eta_l} e^{-t^2/2}\,dt, \qquad l = 1, 2, \ldots, m.$$

Находим числовые характеристики функции $y_i = \ln x_i$: математические ожидания

$$\mathbf{M}\, y_l = \int_{a_l}^{b_l} \big(\ln x_l\big)\, g(x_l)\, dx_l, \qquad l = 1, 2, \ldots, m,$$

где $g(x_l)$ — маргинальная плотность распределения, имеющего плотность $g(x_i, x_j)$, и ковариацию

$$\operatorname{cov}(y_i, y_j) = \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_j}^{b_j} \big(\ln x_i \ln x_j\big)\, g(x_i, x_j)\, dx_i\, dx_j - \mathbf{M}\, y_i\, \mathbf{M}\, y_j\,.$$

Для аддитивной функции (1) определяем: математическое ожидание $\mathbf{M}\, y = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{M}\, y_i$, дисперсию $\mathbf{D}\, y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \operatorname{cov}(y_i, y_j)$ и границы $a_y = \sum_{i=1}^{m} \ln a_i$, $b_y = \sum_{i=1}^{m} \ln b_i$ интервала изменения. Зная параметры $\mathbf{M}\, y$, $\mathbf{D}\, y$, a_y, b_y, можно полагать, что случайная величина y имеет двойное нормальное распределение с плотностью вероятностей

$$g(y) = \frac{\eta_y}{\sqrt{2\pi}}\, \exp\Big\{ -\frac{1}{2} \Big(\gamma_y + \eta_y\, \mathcal{N}^{-1}\Big(\frac{y - a_y}{b_y - a_y}, 0, 1\Big)\Big)^2 \Big\}\, \frac{d}{dy} \Big(\mathcal{N}^{-1}\Big(\frac{y - a_y}{b_y - a_y}, 0, 1\Big)\Big),$$

где параметры формы η_y и γ_y вычисляются по зависимостям, аналогичным (2) и (3).

Находим искомые числовые характеристики:

$$\mathbf{M}\, u = \int_{a_y}^{b_y} e^{\,y}\, g(y)\, dy, \quad \mathbf{D}\, u = \int_{a_y}^{b_y} e^{\,2\,y}\, g(y)\, dy - \big(\mathbf{M}\, u\big)^2.$$

Результаты расчетов числовых характеристик по изложенному методу сравнивались с вычислениями по известным теоремам, не учитывающим корреляцию случайных аргументов. Кроме этого, они сравнивались с результатами, полученными методом Монте-Карло при нормальных распределениях коррелированных аргументов, и показали непосредственную адекватность. К достоинству предложенного метода следует также отнести возможность его использования при распределениях аргументов, существенно отличающихся от нормального.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Котельников В. П.* Математическая модель стьюдентовско-нормального распределения случайных величин и ее применения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2016, т. 23, в. 1, с. 48–49.