ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2018

А. В. Калинкин, **В. Д. Лаврентьев** (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Спектральное представление переходных вероятностей для критического ветвящегося процесса $\mathbf{T \to 0, 2T}$.**

Рассматривается однородный во времени марковский процесс рождения и гибели линейного типа $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, переходные вероятности $P_{ij}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$ которого при $t \to 0+$ представимы в виде

$$P_{i,i-1}(t) = p_0 \lambda\, it + o(t), \quad P_{ii}(t) = 1 - \lambda\, it + o(t), \quad P_{i,i+1}(t) = p_2 \lambda\, it + o(t),$$

где $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, $p_0 + p_2 = 1$ ($\lambda > 0$). Далее $p_0 = 1/2$, $p_2 = 1/2$. Экспонециальная (двойная) производящая функция переходных вероятностей

$$\mathcal{F}(t; z, s) = \sum_{i=0}^{\infty} (z^i / i!) F_i(t; s), \quad F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j, \qquad |s| < 1,$$

удовлетворяет первому и второму уравнениям Колмогорова [4]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda z \Big(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \Big), \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda \Big(\frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2} - s \Big) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}, \quad \mathcal{F}(0; z, s) = e^{zs}. \tag{1}$$

Решение системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных (1) ищем в виде с разделенными переменными

$$\mathcal{F}(t; z, s) = e^z + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t x} \widetilde{C}_x(z) C_x(s) \mu(x)\, dx; \tag{2}$$

известно, что спектр $\mu(x)$ непрерывный [1]. Подставляя выражение (2) в уравнения (1), получаем дифференциальные уравнения

$$z \Big(\frac{1}{2}\, \widetilde{C}_x''(z) - \widetilde{C}_x'(z) + \frac{1}{2}\, \widetilde{C}_x(z) \Big) + x\, \widetilde{C}_x(z) = 0, \quad \frac{1}{2}\, (s-1)^2 C_x'(s) + x\, C_x(s) = 0,$$

решения которых имеют вид

$$\widetilde{C}_x(z) = C_1 e^z \sqrt{2xz}\ J_1(-2\sqrt{2xz}\,) + C_2 e^z \sqrt{2xz}\ Y_1(-2\sqrt{2xz}\,), \quad C_x(s) = C_3 e^{2x/(s-1)},$$

где $J_1(z)$ и $Y_1(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода [5], C_1, C_2, C_3 — константы. Учитывая, что фунция $Y_1(x)$ неаналитическая в нуле, искомое представление получает вид

$$\mathcal{F}(t; z, s) = e^z + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t x}\, e^z \sqrt{2xz}\, J_1(-2\sqrt{2xz}\,) e^{2x/(s-1)} \mu(x)\, dx.$$

При начальном условии $t = 0$ имеем равенство

$$e^{zs} - e^z = \int_0^{\infty} e^z \sqrt{2xz}\, J_1(-2\sqrt{2xz}) e^{2x/(s-1)} \mu(x)\, dx;$$

последний интеграл после простых преобразований совпадает с табличным интегралом (см. [5])

$$\int_0^\infty e^{-px^2} J_1(cx)\,dx = \frac{1-e^{-c^2/(4p)}}{c},$$

если положить $\mu(x) = 1/x$. Подобная спектральная мера для системы дифференциальных уравнений Колмогорова в случае марковского процесса $\xi(t)$ найдена через применение ортогональных многочленов Лагерра в работе [1], см. пример в главе IV.

Теорема [2]**.** *Для двойной производящей функции переходных вероятностей справедливо выражение*

$$\mathcal{F}(t;z,s) = e^z + \int_0^\infty e^{-\lambda tx+z+2x/(s-1)} \sqrt{\frac{2z}{x}}\, J_1(-2\sqrt{2xz}\,)\,dx, \qquad |s|<1. \tag{3}$$

Поставляя интегральное представление [5]

$$J_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{0+} \frac{1}{u^2}\ \exp\left\{\left(u+\frac{1}{u}\right)\frac{z}{2}\right\}du$$

в формулу (3), после преобразований и вычислений получаем

Следствие [3]**.** *Для процесса рождения и гибели линейного типа $\xi(t)$ имеет место свойство ветвления переходных вероятностей*:

$$\mathcal{F}(t;z,s) = e^{z\,F_1(t;s)};\quad F_i(t;s) = F_1^i(t;s),\ i=0,1,2,\ldots,\ F_1(t;s) = 1-\frac{1-s}{(\lambda t/2)(1-s)+1}. \tag{4}$$

Изложенный метод нахождения интегрального представления двойной производящей функции переходных вероятностей через непрерывный спектр и вывода нелинейного свойства (4) переносится на критический марковский процесс рождения и гибели квадратичного типа $2T \to T, 3T$ $(p_1=1/2,\ p_3=1/2)$ [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lederman W.*, *Reuter G. E. H.* Spectral theory for the differential equations of simple birth and death processes. — Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 1954, v. 246, p. 321–369.
2. *Лаврентьев В. Д.* Спектральные представления переходных вероятностей критических марковских ветвящихся процессов. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 86 с.
3. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
4. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, в. 2, с. 23–84.
5. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974, 296 с.