ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2018

А. В. Калинкин, **О. А. Белякова** (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана). **Статистическое моделирование марковского процесса «хищник-жертва» $\mathbf{T_1+T_2\to 0, 2T_2}$; $\mathbf{T_1\to 2T_1}$; $\mathbf{T_2\to 0}$ и результаты экспериментов Г. Ф. Гаузе.**

Рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t))$, $t\in[0,\infty)$, на множестве состояний $N^2=\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2),\ \alpha_1,\alpha_2=0,1,\ldots\}$, переходные вероятности $P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t)=\mathbf{P}\{\xi(t)=(\beta_1,\beta_2)\mid\xi(0)=(\alpha_1,\alpha_2)\}$ которого при $t\to 0+$ представимы в виде ($\rho\geqslant 0,\ \ \lambda\geqslant 0,\ \ \mu\geqslant 0$; $p_0\geqslant 0,\ \ p_2\geqslant 0,\ \ p_0+p_2=1$)

$$\begin{aligned}
P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) &= 1-\left(\rho\alpha_1\alpha_2+\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2\right)t+o(t),\\
P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2-1)}(t) &= p_0\rho\alpha_1\alpha_2 t+o(t),\\
P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2+1)}(t) &= p_2\rho\alpha_1\alpha_2 t+o(t),\\
P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}(t) &= \lambda\alpha_1 t+o(t),\\
P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2-1)}(t) &= \mu\alpha_2 t+o(t).
\end{aligned}$$

Производящая функция переходных вероятностей

$$F_\alpha(t;s)=\sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty}P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t)\,s_1^{\beta_1}\,s_2^{\beta_2},\quad |s_1|\leqslant 1,\quad |s_2|\leqslant 1,$$

удовлетворяет второму (прямому) уравнению Колмогорова [3]

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t}=\rho\left(p_2s_2^2+p_0-s_1s_2\right)\frac{\partial^2F_\alpha(t;s)}{\partial s_1\partial s_2}+\lambda\left(s_1^2-s_1\right)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_1}+\mu\left(1-s_2\right)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_2},$$

с начальным условием $F_\alpha(0;s)=s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}$. Из последнего уравнения можно получить [1] систему нелинейных дифференциальных уравнений [2] ($p_2>1/2$)

$$\dot x_1=-\rho x_1x_2+\lambda x_1,\quad \dot x_2=(2p_2-1)\rho x_1x_2-\mu x_2,\quad x_1(0)=x_1^0,\quad x_2(0)=x_2^0,\qquad (1)$$

где $x_1(t)$ — количество «жертв», $x_2(t)$ — количество «хищников» в момент t.

Скачки процесса рождения и гибели квадратичного типа показаны на рис. 1. Процесс $(\xi_1(t),\xi_2(t))$ при $t\to\infty$ оказывается либо в поглощающем состоянии $(0,0)$, либо в множестве состояний $\{(1,0),(2,0),\ \ldots\}$. На рис. 2–4 даны графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и примеры реализаций марковского процесса «хищник-жертва»: колебания, вырождение «жертв», вырождение «хищников». Значения параметров $\rho=0,01$; $\lambda=0,6$; $\mu=0,8$; $p_2=0,7$, начальные условия $x_1^0=\xi_1(0)=70$; $x_2^0=\xi_2(0)=350$.

В работе [2] описаны многодневные эксперименты по наблюдению за количеством инфузорий *Didinium nasutum* и *Paramecium caudatum*, из которых первый вид является хищником, пожирающим второй вид, — с разным начальными числом особей и в различных питательных средах. Качественный и лабораторный анализ в [2] взаимоотношений «хищников» и «жертв» привел к трем случаям, указанным на рис. 2–4.

В [2] не удалось получить числовые данные «колебательного» вида и для получения «колебательных» траекторий осуществлялась иммиграция особей. Для объяснения рис. 3, 4 автор [2] пытался видоизменить правую часть системы уравнений (1).

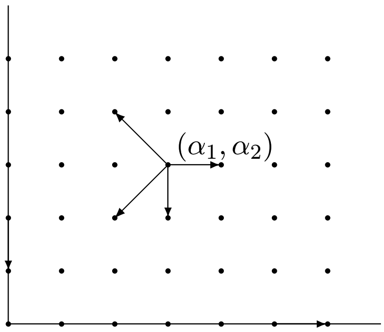

Рис. 1

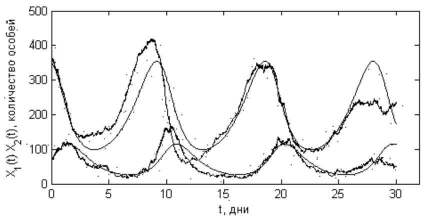

Рис. 2

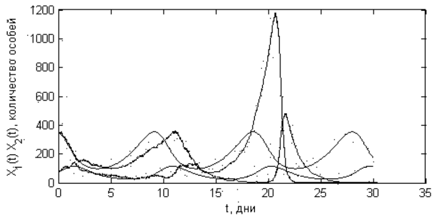

Рис. 3

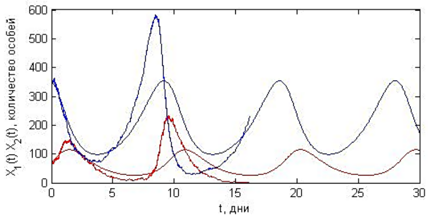

Рис. 4

Марковский процесс «хищник-жертва» соответствует всем вариантам поведения популяционной системы «хищников» и «жертв». В [1] методом Монте-Карло выявлены закономерности поведения реализаций стохастического процесса в зависимости от параметров и начальных условий. Из результатов [1] следует, что вычисленные в [2] параметры ρ, λ, μ, p_2, $\xi_1(0)$, $\xi_2(0)$ для экспериментальной двухвидовой системы оказались таковы, что колебания численности особей и не должны были наблюдаться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белякова О. А.* Стохастические модели взаимодействия двух видов и результаты экспериментов Г. Ф. Гаузе. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
2. *Gause G. F.* The Struggle for Existense. Baltimore: Williams and Wilkins, 1934, 163 p. (Перепечатано: *Гаузе Г. Ф.* Борьба за существование. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 160 с.)
3. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, в. 2, с. 23–84.
4. *Калинкин А. В.* Статистическое моделирование дискретных марковских систем с взаимодействием. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 44 с. http://ebooks.bmstu.ru/catalog/109/book1630.html