О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 25 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 1
2018

А. В. Л е б е д е в (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова)**. Верхняя граница среднего минимума случайных величин с известным коэффициентом Кендалла.**

Пусть заданы случайные величины X и Y с одинаковым распределением F на $\mathbb{R}_+$ с конечным средним и известен их коэффициент корреляции Кендалла τ. Обозначим

$$I = \mathbf{E} \min \{X, Y\}.$$

Верхнюю границу значений I, возможных при этих условиях, обозначим через $\widetilde{I}$. Нашей задачей будет получить оценки для нее. Понятно, что в любом случае $\widetilde{I} \leqslant \mathbf{E}X$. Отметим также, что силу соотношения

$$\max \{X, Y\} = X + Y - \min \{X, Y\}$$

верно

$$J = \mathbf{E} \max \{X, Y\} = 2\mathbf{E}X - I,$$

так что верхняя граница I пересчитывается в нижнюю границу для J.

Задача может иметь приложения в самых разных областях.

В теории надежности X и Y могут описывать продолжительности жизни двух компонент оборудования, и нас интересует среднее время до выхода из строя хотя бы одной из них I или до выхода из строя обеих J. В технических системах износ или выход из строя одних деталей может сказываться на других деталях, а на все вместе может влиять общий режим эксплуатации (температура, влажность и т. п.).

В теории массового обслуживания рассматриваются модели с разделением заявок (fork-join). А именно, каждая заявка разделяется на несколько подзаявок, каждая из которых становится в очередь к своему прибору. Тогда время пребывания заявки в системе (время отклика) представляет собой максимум из времен пребывания подзаявок, причем эти времена зависимы.

В финансовой математике рассматриваются так называемые радужные (rainbow) опционы. Примем за основу европейский опцион-колл, т. е. договор на покупку актива в известный момент времени T за фиксированную цену K (цена исполнения). Предположим, что речь идет о покупке одного из нескольких активов (разных «цветов радуги») на выбор, причем выбор в момент T предоставляется либо продавцу (он выбирает актив с минимальной текущей ценой), либо покупателю (он выбирает актив с максимальной текущей ценой). Тогда справедливые цены на опционы описываются средними минимумами или максимумами доходов по активам.

Поскольку решить поставленную задачу в общем виде затруднительно, решим ее для одного достаточно широкого класса распределений.

Предположим, что обратная функция к правому хвосту распределения $x(t) = \overline{F}^{-1}(t)$, $t \in [0,1]$, существует и является кусочно-гладкой. Определим функцию $y(t) = -x'(t)$ в точках непрерывности производной. Предположим далее, что уже $y(t)$ является кусочно-гладкой. Введем функцию $z(t) = -y'(t) = x''(t)$ в ее точках непрерывности.

Теорема 1. *Пусть* $z(t) \geqslant 0$ *на* $[0,1]$ *и* $t^2 z(t)$ *интегрируема в нуле, тогда*

$$\widetilde{I} = \int_0^{+\infty} \widetilde{\delta}(\overline{F}(x))\,dx = \int_0^1 \widetilde{\delta}(t) y(t)\,dt,$$

где

$$\widetilde{\delta}(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < a, \\ a, & a \leqslant t < (a+1)/2, \\ 2t-1, & (a+1)/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

и

$$a = 1 - \sqrt{\frac{1-\tau}{2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thomasian A.* Analysis of fork-join and related queueing systems. — ACM Comput. Surv., 2014, v. 47, № 2, art. 17 (July 2014), 71 p.

2. *Stulz R. M.* Options on the minimum or the maximum of two risky assets. — J. Financial Economics, 1982, v. 33, № 1, p. 161–185.

3. *Nelsen R.* An introduction to copulas. Springer, 2006, 276 p.

4. *Nelsen R. B.*, *Quesada Molina J. J.*, *Rodríguez-Lallena J. A.*, *Úbeda Flores M.* Bounds on bivariate distribution functions with given margins and measures of association. — Commun. Statist. Theor. Methods, 2001, v. 30, № 6, p. 1055–1062.

5. *Nelsen R. B., Quesada Molina J. J., Rodríguez Lallena J. A., Úbeda Flores M.* Best-possible bounds on sets of bivariate distribution functions. — J. Multivar. Anal., 2004, v. 90, p. 348–358.