ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2018

Г. К. Соколова (Иркутск, ИГУ). **О структуре множества периодов периодической функции нескольких переменных.**

При описании различных процессов и явлений, которые повторяются во времени и пространстве, а также самоподобных объектов и их свойств возникает понятие периодической функции нескольких переменных. В частности, к нему приводят исследования зонной структуры твердого тела [1], когда на волновую функцию $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, которая моделирует состояние кристалла, накладывают условия Борна–Кармана $\psi(\overline{r} + N_i\overline{a}_i) = \psi(\overline{r})$, $i = 1, \dots, d$, где d — размерность решетки Браве́, $\overline{a}_i$ — ее элементарные трансляционные векторы, N_i — целые числа. Предполагается, что ψ имеет *базисные* периоды $\overline{a}_i$, а всякий ее период является линейной комбинацией векторов $\overline{a}_i$ с целыми коэффициентами. Эти допущения связаны со спецификой задачи и следуют из структуры множества, на котором задана волновая функция, а не из самого свойства периодичности. В представленной заметке показано, каким может быть множество периодов периодической функции нескольких переменных с учетом вырожденного случая периодичности — постоянства функции.

Определение 1. Функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ будем называть периодической с периодом $\overline{T}$, если существует вектор $\overline{T} \neq \overline{0}$ такой, что для всех $\overline{r} \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $f(\overline{r} + \overline{T}) = f(\overline{r})$.

Определение 2. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является периодической с периодом $\overline{T}$. Период $\overline{T}_0$ наименьшего модуля, сонаправленный с вектором $\overline{T}$, назовем основным периодом функции f в направлении $\overline{\mathcal{T}}$, где $\overline{T} = |\overline{T}|\overline{\mathcal{T}}$.

Рассмотрим теперь множество n-мерных прямых $\ell_{\overline{T}}(\overline{a})$ с направляющим вектором $\overline{T}$, где $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ — радиус-вектор некоторой точки, принадлежащей прямой $\ell_{\overline{T}}(\overline{a})$. Выберем эту точку такой, что $\langle \overline{a}, \overline{T} \rangle = 0$, тогда соответствие $\overline{a} \to \ell_{\overline{T}}(\overline{a})$ будет взаимно однозначным. Вдоль каждой такой прямой данная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принимает значения

$$f(\overline{r})\big|_{\overline{r} \in \ell_{\overline{T}}(\overline{a})} = f(\overline{a} + t\overline{\mathcal{T}}), \tag{1}$$

т. е. является функцией одной переменной $t \in \mathbb{R}$.

В работе [2] были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если периодическая с периодом $\overline{T}$ функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна и отлична от постоянной вдоль хотя бы одной прямой $\ell_{\overline{T}}(\overline{a})$, то она имеет основной период в данном направлении $\overline{\mathcal{T}}$.*

Теорема 2. *Если периодическая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет основной период $\overline{T}_0$ в данном направлении $\overline{\mathcal{T}}$, то любой ее период $\overline{T}$, коллинеарный $\overline{\mathcal{T}}$, имеет вид $\overline{T} = k\overline{T}_0$, где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Таким образом, множеством периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ может быть m-мерная решетка [3, с. 13], т. е. совокупность всех возможных нетривиальных линейных комбинаций с целыми коэффициентами m линейно независимых n-мерных векторов $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \dots, \overline{T}_m$, называемых базисными или порождающими векторами решетки. Как показано в [2], эти векторы являются основными периодами данной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в своих направлениях, но не всякие основные периоды порождают решетку, т. е. обратное неверно.

Функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, постоянную вдоль каждой прямой $\ell_{\overline{T}}(\overline{a})$, называют постоянной в направлении $\overline{\mathcal{T}}$. Это означает, что при каждом фиксированном $\overline{a}$ функция (1) не зависит от t.

Теорема 3. *Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ постоянна в направлении $\overline{\mathcal{T}}$, то она является периодической с периодом $\alpha\overline{\mathcal{T}}$, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Покажем, что $f(\overline{r} + \alpha\overline{\mathcal{T}}) = f(\overline{r})$ при любом $\overline{r} \in \mathbb{R}^n$. Всякий вектор $\overline{r} \in \mathbb{R}^n$ однозначно представим в виде $\overline{r} = \overline{a}_{\overline{r}} + \alpha_{\overline{r}}\overline{\mathcal{T}}$, где $\langle \overline{a}_{\overline{r}}, \overline{\mathcal{T}} \rangle = 0$ и $\alpha_{\overline{r}} = \langle \overline{r}, \overline{\mathcal{T}} \rangle \in \mathbb{R}$, тогда $f(\overline{r} + \alpha\overline{\mathcal{T}}) = f(\overline{a}_{\overline{r}} + (\alpha_{\overline{r}} + \alpha)\overline{\mathcal{T}})$, причем последнее выражение не зависит от значений $\alpha_{\overline{r}} + \alpha$. Положим $\alpha = 0$ и получим искомое равенство.

З а м е ч а н и е. Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является постоянной вдоль каждого из линейно независимых направлений $\overline{\mathcal{T}}_1, \overline{\mathcal{T}}_2, \ldots, \overline{\mathcal{T}}_k$, где $k \leqslant n$, то множеством ее периодов является линейная оболочка векторов $\overline{\mathcal{T}}_1, \overline{\mathcal{T}}_2, \ldots, \overline{\mathcal{T}}_k$. При $k = n$ функция f окажется тождественно постоянной.

Из приведенных рассуждений можно заключить, что множество периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ состоит из векторов

$$\overline{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \overline{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \overline{\mathcal{T}}_k,$$

где $\overline{T}_k$ — порождающие векторы m_1-мерной решетки, $\overline{\mathcal{T}}_k$ — направления, вдоль которых функция постоянна, числа $n_k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ одновременно не обращаются в нуль, и $m_1 + m_2 \leqslant n$. Например, в трехмерии ($n = 3$) функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ может иметь множеством периодов: все пространство ($m_1 = 0$, $m_2 = 3$), плоскость ($m_1 = 0$, $m_2 = 2$), прямую ($m_1 = 0$, $m_2 = 1$), счетные семейства параллельных плоскостей ($m_1 = 1$, $m_2 = 2$) или прямых ($m_1 = 2$, $m_2 = 1$ и $m_1 = 1$, $m_2 = 1$), одно-, двух- или трехмерную решетки ($m_1 = 1, 2, 3$ соответственно, а $m_2 = 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашкрофт Н.*, *Мермин Н.* Физика твердого тела. М.: Мир, 1979, Том 1, 400 с.
2. *Соколова Г. К.*, *Орлов С. С.* Об основных периодах периодической функции нескольких переменных. — Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов: Научная книга, 2018, с. 294–297.
3. *Скриганов М. М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов. — Труды МИАН СССР, 1985, т. 171, с. 3–122.