ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2018

**А. Л. Талис, А. Л. Рабинович** (Москва, ИНЭОС РАН; Петрозаводск, ИБ КарНЦ РАН). **Базовая единица структур, допускающих аппроксимацию цепями правильных тетраэдров, и ее теоретико-групповое обоснование.**

Отображение риманова пространства на соприкасающееся евклидово сохраняет, с точностью до бесконечно малых второго порядка, все расстояния, измеренные в соседстве с заданной кривой [1, p. 99]. Если подструктура упорядоченной, кристаллической или некристаллической, структуры в 3-мерном евклидовом пространстве $E^3$ является линейной, то расположение атомов в ней может определяться симметриями римановых (неевклидовых) математических конструкций, которые, подобно федоровским группам для кристаллов, не предполагают существования атомов. Минимальная часть $E^3$ — это тетраэдр; упорядоченную структуру можно свести к комбинации структур, допускающих аппроксимацию цепями правильных тетраэдров. Выявление их симметрии требует определения базовой структурной единицы, позволяющей использовать симметрию соответствующей ей согласно [1] неевклидовой подструктуры. Варианты цепи из правильных тетраэдров содержат в том числе и максимально плотные объединения правильных тетраэдров. Идеально плотные упаковки достигаются в 4-мерном многограннике (политопе $\{3,3,5\}$ [2]), расположенном на 3-мерной сфере постоянной положительной кривизны. При отображении цепи из $\{3,3,5\}$ (т. е. цепи, имеющей не более 30 вершин [2]) в $E^3$ количество вершин объединения правильных тетраэдров, составляющих искомую базовую единицу, не должно меняться. Нами показано, что этому условию удовлетворяет только 7-вершинное объединение по граням 4-х правильных тетраэдров — тетраблок. Группа симметрии тетраблока определяется проективной специальной линейной группой PSL(2,7) $\equiv$ $^7O$ порядка 168. Строение группы $^7O$ — расширения группы вращений октаэдра циклической группой 7-го порядка, определяет наличие энантиоморфных (левого и правого) вариантов тетраблока, которые взаимно трансформируются друг в друга (дробно-линейными преобразованиями) через неэнантиоморфный (плоский) вариант тетраблока. «Правой» и «левой» орбитам из 7 элементов группы $^7O$ соответствует ее разложение на смежные классы, соответственно, по подгруппам $O'$ и $O''$ (являющимся группами вращений октаэдра) группы $^7O$; правый и левый тетраблоки обладают точечной группой симметрии $C_2$, поэтому они определяются разложениями $^7O$ на двойные смежные классы:

$$^7O = \bigcup_{i=1}^{7} g_i O' = \bigcup_{k=1}^{4} C_2 g_k O' \quad \text{и} \quad ^7O = \bigcup_{j=1}^{7} g_j O'' = \bigcup_{f=1}^{4} C_2 g_f O'',$$

где группы $O'$ и $O''$ не сопряжены в $^7O$, $g_i, g_k \notin O'$, $g_j, g_f \notin O''$, $g_k, g_f \notin C_2$. Эти разложения задают группы цветной [3] $W$-симметрии $(^7O')^W$ и $(^7O'')^W$, изоморфные группе $^7O$, в которых все элементы группы $^7O$, кроме группы $C_2$, нагружены дополнительными преобразованиями. Плоский тетраблок определяется разложением

$$\mathrm{PGL}(2,7) \equiv {}^7O_h = \bigcup_{n=1}^{4} C_{2v} g_n O_h,$$

где $O_h$ — точечная группа октаэдра, $C_{2v}$ — надгруппа группы $C_2$, $C_{2v} \not\ni g_n \notin O_h$.

Работа выполнена по теме № 0221-2017-0050 (№ г.р. АААА-А17-117031710039-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cartan E.* Geometry of Riemannian spaces. Brookline: Math Sci. Press, 1983.
2. *Coxeter H. S. M.* Regular Polytopes. N.Y.: Dover Publ., 1973.
3. *Копцик В. А.*, *Коцев И. Н.* К теории и классификации групп цветной симметрии. II. W -симметрия. — Сообщения ОИЯИ, Дубна, 1974, Р4 - 8068.