ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2018

А. К. Мелешко (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана). **Перечисление помеченных эйлеровых пентациклических блоков.**

Цикломатическим числом связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин. Под k — *циклическим* графом понимается связный граф с цикломатическим числом равным k. *Гомеоморфный тип* — это общий граф (допускаются петли и кратные ребра), не содержащий вершин степени 2, из которого с помощью подразбиения ребер могут быть получены все графы данного класса гомеоморфных графов.

Лемма (Степанов [1]). *Пусть гомеоморфный тип* H *— связный гладкий общий граф, отличный от изолированной вершины или петли, и* H *имеет* a *вершин,* b *ребер (петля также — ребро),* b_0 *петель,* b_i *пучков ребер кратности* i, $A(H)$ *— порядок вершинно-реберной групыы автоморфизмов графа* H. *Тогда число помеченных графов* C_n *с* n *вершинами и гомеоморфными типом* H *равно*:

$$C_n = \frac{n!}{2^{b_0}A(H)} Coef_{x^{n-a}} \frac{x^{b+b_0-\sum_{i=1}^{b} b_i} \prod_{i=1}^{b}(x+i(1-x))^{b_i}}{(1-x)^b}$$

Теорема. *Число* EP_n *помеченных эйлеровых пентациклических блоков с* n *вершинами при* $n \geqslant 5$ *равно*

$$EP_n = \frac{n!(n-5)}{29030400}(265n^6+1605n^5-15677n^4-158745n^3+1420900n^2-3349020n+2332512).$$

Доказательство. Граф является эйлеровым только тогда, когда его гомеоморфный тип — эйлеров граф. Из 118 гомеоморфных типов пентациклических блоков только 5 являются эйлеровыми блоками [2]. Эти графы представлены на рис.

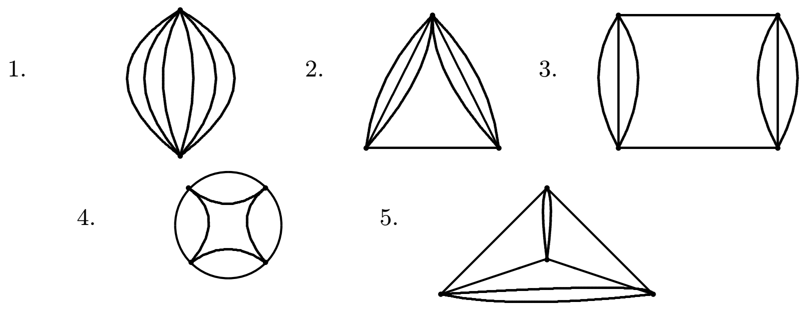

Рис.

Тогда в силу леммы Степанова, получим

1) $a = 2, b = 6, b_0 = 0, b_6 = 1, b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0, A(H) = 1440$

$$EP_{1,n} = \frac{n!}{172800}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n+23);$$

2) $a=3, b=7, b_0=0, b_1=1, b_3=2, b_2=b_4=b_5=b_6=b_7=0, A(H)=72$

$$EP_{2,n}=\frac{n!}{51840}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n^2+21n+74);$$

3) $a=4, b=8, b_0=0, b_1=2, b_3=2, b_2=b_4=b_5=b_6=b_7=b_8=0, A(H)=144$

$$EP_{3,n}=\frac{n!}{725760}(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n^3+15n^2+158n-846);$$

4) $a=4, b=8, b_0=0, b_2=4, b_1=b_3=b_4=b_5=b_6=b_7=b_8=0, A(H)=128$

$$EP_{4,n}=\frac{n!}{645120}(n-5)(n-6)(n-7)(n^4+18n^3+35n^2-246n-144);$$

5) $a=4, b=8, b_0=0, b_1=4, b_2=2, b_3=b_4=b_5=b_6=b_7=b_8=0, A(H)=32$

$$EP_{5,n}=\frac{n!}{161280}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+15n+42).$$

Сложив числа графов 1–5 типов, получим утверждение теоремы.

Автор благодарит В. А. Воблого за поставленную задачу и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Степанов В. Е.* О некоторых особенностях строения случайного графа вблизи критической точки. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 4, с. 633–657.
2. *Heap B. R.* The enumeration of homeomorphically irreducible star graphs. — J. Math. Phys., 1966, v. 7, № 2, p. 1582–1587.