ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2018

А. В. Калинкин, **Л. В. Туркина** (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Решение уравнений Колмогорова для марковского процесса рождения квадратичного типа.**

Рассматривается однородный во времени марковский процесс рождения квадратичного типа $\xi(t)$, $t \in [0,\infty)$, на множестве состояний $N = \{0,1,2,\ldots\}$, переходные вероятности $P_{ij}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t)=j \mid \xi(0)=i\}$ которого при $t \to 0+$ представимы в виде

$$P_{i,i+1}(t) = (\lambda_2 i(i-1) + \lambda_1 i)t + o(t), \quad P_{ii}(t) = 1 - (\lambda_2 i(i-1) + \lambda_1 i)t + o(t),$$

$\lambda_2 > 0, \lambda_1 > 0$ [1], [2]. Экспоненциальная (двойная) производящая функция переходных вероятностей $\mathcal{F}(t;z,s) = \sum_{i,j=0}^{\infty}(z^i/i!)P_{ij}(t)s^j$, $|s| \leqslant 1$, удовлетворяет первому (обратному) и второму (прямому) уравнениям Колмогорова [4]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda_2 z^2\Big(\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial z^3} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2}\Big) + \lambda_1 z\Big(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\Big), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda_2(s^3 - s^2)\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s^2} + \lambda_1(s^2 - s)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}, \quad \mathcal{F}(0;z,s) = e^{zs}. \tag{2}$$

Решение системы линейных уравнений в частных производных (1), (2) ищется в виде ряда с тремя разделенными переменными

$$\mathcal{F}(t;z,s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \widetilde{C}_n(z) C_n(s) e^{-\lambda_n t}. \tag{3}$$

Для рассматриваемого процесса $\lambda_n = \lambda_2 n(n-1) + \lambda_1 n$, $\widetilde{C}_n(z)$ — многочлен, $C_n(s)$ — аналитическая функция (ср. [4], § 4.2.1) Подставляя выражение (3) в уравнения (1), (2), получаем дифференциальные уравнения (введено обозначение $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$)

$$z^2(\widetilde{C}_n'''(z) - \widetilde{C}_n''(z)) + \lambda z(\widetilde{C}_n''(z) - \widetilde{C}_n'(z)) + (n(n-1) + \lambda n)\widetilde{C}_n(z) = 0, \tag{4}$$

$$(s^3 - s^2)C_n''(s) + \lambda(s^2 - s)C_n'(s) + (n(n-1) + \lambda n)C_n(s) = 0. \tag{5}$$

Положим $\widetilde{C}_0(z) = 1$, $C_0(s) = 1$. Решение уравнения (4) есть обобщенный гипергеометрический многочлен [5] $\widetilde{C}_n(z) = z\,{}_2F_2(1-n, n+\lambda; 2, \lambda; z)$, $n = 1,2,\ldots$ В уравнении (5) замена $C_n(s) = s^n u(s)$ приводит к гипергеометрическому уравнению [5]

$$s(1-s)u''(s) + (2n + \lambda - (2n+\lambda)s)u'(s) - n(n+\lambda-1)u(s) = 0.$$

То есть $C_n(s) = s^n\,{}_2F_1(n, n+\lambda-1; 2n+\lambda; s)$, $n = 1,2,\ldots$, где ${}_2F_1(a_1,a_2;b_1;s)$ — гипергеометрическая функция. Искомый ряд получает вид

$$\mathcal{F}(t;z,s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n z\,{}_2F_2(1-n, n+\lambda; 2, \lambda; z) s^n\,{}_2F_1(n, n+\lambda-1; 2n+\lambda; s) e^{-(\lambda_2 n(n-1) + \lambda_1 n)t}.$$

При подстановке начального значения $t = 0$ имеем равенство

$$\frac{e^{zs}-1}{zs} = {}_2F_2(1,\lambda;2,\lambda;zs) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,{}_2F_2(1-n, n+\lambda; 2, \lambda; z) s^{n-1}\,{}_2F_1(n, n+\lambda-1; 2n+\lambda; s).$$

Сумма совпадает с табличной суммой 6.8.4.1 [6] ($p = 0,\ \ q = 2,\ \ r = 2,\ \ m = 0$), откуда $A_n = (-1)^{n+1}(\lambda)_{n-1}(\lambda+1)_{n-1}/(\lambda+1)_{2n-2}$, $n = 1, 2, \ldots$, где $(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1)$.

Теорема [3]. *Двойная производящая функция переходных вероятностей равна*

$$\mathcal{F}(t; z, s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(\lambda)_{n-1}(\lambda+1)_{n-1}}{(\lambda+1)_{2n-2}} z\, {}_2F_2(1-n, n+\lambda; 2, \lambda; z) \times \\ \times s^n {}_2F_1(n, n+\lambda-1; 2n+\lambda; s) e^{-(\lambda_2 n(n-1)+\lambda_1 n)t},$$

где ${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; z)$, ${}_2F_1(a_1, a_2; b_1; s)$ *— гипергеометрические функции.*

Найдено *минимальное решение* [1], [2] уравнений Колмогорова. Изложенный в [3] способ нахождения переходных вероятностей может быть применен к марковским процессам рождения кубического и биквадратичного типов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гихман И. И.*, *Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977, 568 с.
2. *John P. W. M.* A note on the quadratic birth process. — J. London Math. Soc., 1961, v. 36, p. 159–160.
3. *Туркина Л. В.* Решение уравнений Колмогорова для марковских процессов рождения квадратичного типа. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 99 с.
4. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, в. 2, с. 23–84.
5. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973, 296 с.
6. *Прудников А. П.*, *Брычков Ю. А.*, *Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986, 800 с.